



Grundriss

der

mathematischen Verhältnisse

der

Krystalle

von

Dr. Friedrich Pfaff,
Privatdocenten an der K. Universität Erlangen.



Mit 16 Tafeln.



Nördlingen.
Druck und Verlag der C. H. Beck'schen Buchhandlung.
1853.

Herrn

Karl von Raumer,

seinem verehrten Lehrer,

gewidmet

vom Verfasser.

Vorrede.

Unter allen Zweigen der Naturwissenschaft ist keiner so spät an dem gemeinschaftlichen Stamme hervorgebrochen, als derjenige, welcher die Kenntniss von der regelmässigen selbständigen Form der leblosen Körper trägt, die Krystallographie, keiner so schnell zur Entwicklung von Blüthen und Früchten gekommen, keiner aber auch so rasch wieder übersehen und verlassen worden. Es ist kaum ein Menschenalter verflossen, dass man überhaupt daran dachte, in der Gestalt der Mineralien und Salze, die man sie annehmen sah, wo ihre Theile in einen Zustand versetzt waren, der sie zur selbständigen Ausbildung ihrer Gesammtform befähigte, etwas mehr zu erblicken, als einen ergötzlichen Zufall oder ein zierliches Spiel der Natur, — noch wirkt mit ungeschwächter Kraft in der Wissenschaft C. S. Weiss, der uns lehrte, auch die verwickeltsten dieser Formen, die uns wie unauflösbare Räthsel zu necken schei-

nen, auf wenige bestimmte und einfache Gesetze zurückzuführen, und doch ist trotz den glänzendsten Resultaten, zu denen sie der Physik und der Chemie verhalf, die Krystallographie fast ebenso schnell wieder vernachlässigt und nur von sehr wenigen noch der Beachtung werth gehalten worden.

Die Chemie, namentlich die organische Chemie, welche sich unter ihren Verwandten in der Wissenschaft gegenwärtig der meisten Gunst bei den Verehrern und Pflegern derselben zu erfreuen hat, scheint sich wieder ihrer jüngeren Schwester annehmen zu wollen, und der Krystallographie, die gewiss auch diesen Dienst nicht unbelohnt lassen wird, mehr Aufmerksamkeit zuzulenken.

Je stärker durch den unermüdlichen Fleiss der Chemiker die Zahl der selbständigen Verbindungen vermehrt, je reiner dieselben dargestellt werden, desto dringender musste man sich angeregt fühlen, ausser den übrigen Kennzeichen und Eigenschaften derselben auch die äussere Form derselben möglichst genau ins Auge zu fassen und beurtheilen zu können. Für den Arzt, Physiologen, den Botaniker, denen das Mikroscop ein unentbehrliches Werkzeug geworden ist, bietet die Form der sich ihm mittelst des letzteren kund gebenden krystallisirten Gebilde ohnehin fast das einzige Mittel, die Natur derselben zu erkennen.

Das Bewusstsein der engen Verwandtschaft der einzelnen Fächer der Naturwissenschaften und mit

ihm zugleich die Ueberzeugung von der Nothwendigkeit des Zusammenwirkens derselben zur Förderung jedes einzelnen Theiles derselben ist nie so stark und verbreitet gewesen, wie in der jetzigen Zeit und hat sich deutlich in der grossen Zahl von Lehrbüchern ausgedrückt, die darauf ausgehen, die Bekanntschaft mit allen Fächern der Naturwissenschaft möglichst allgemein und möglichst genau zu machen. „Maass und Gewicht", die Losungsworte der neueren Chemie sind für alle derartige Bestrebungen in allen Fächern allgemein gültig geworden.

Dass dieses ganz besonders für die Krystallographie gelten müsse, die erst durch das Messen und Rechnen zu einer Wissenschaft geworden ist, leuchtet von selbst ein. Zu einem wirklichen Verständniss reicht die Anschauung allein nicht hin, sobald wir es mit schwierigeren Formen und den vom regulären Systeme abweichenderen zu thun haben *).

*) Der Verf. ist durchaus nicht gesonnen, die Nothwendigkeit der Anschauung, die allem anderen vorausgehen muss, nicht anerkennen zu wollen, ist vielmehr der vollkommenen Ueberzeugung, dass dieselbe namentlich von denjenigen, die die Krystallographie streng mathematisch, allein nach Modellen oder Zeichnungen zu treiben sich begnügen, viel zu gering angeschlagen wird, ja dass ohne dieselbe ebenso wenig ein wirkliches Verständniss der Krystalle möglich ist, als einer eine Sprache gründlich erlernen kann, wenn er nur die Grammatik und das Lexicon zu Hülfe nimmt. An einem Modell wird sich ein solcher allenfalls noch zu recht finden, wenn er es mit verwickelten Combinationen zu thun hat. Die Natur ist aber keine Modellschneiderin. Wer sich in den natürlichen Krystallformen auskennen will, der muss geübte

Die grosse Schwierigkeit, die der Verfasser dieses Versuches sehr lebhaft empfunden hat, ist hier, wie überall, das rechte Maass zu finden, den rechten Mittelweg zwischen dem zu viel und dem zu wenig. Sehen wir von dem ausgezeichneten Werke von Naumann über Krystallographie ab, so sind alle übrigen der Art, dass sie die mathematischen Verhältnisse gar nicht berücksichtigen oder nur so weit, als sie aus der unmittelbaren Anschauung sich ergeben. Die mathematischen Vorkenntnisse, welche das Werk von Naumann erfordert, sind aber weit über dem Maasse, welches auf unseren Gymnasien erworben wird, es bleibt daher für alle unsere Studirenden, welche sich nicht noch weiter mit Mathematik auf der Universität befassen, ein verschlossenes Buch, wie die mathematischen Verhältnisse der Krystalle selbst den meisten, die sich mit diesen beschäftigen müssen. Man muss bei diesem Ausspruche bedenken, dass alle unsere Studirenden der Medicin, der Chemie, der Pharmacie Mineralogie und Krystallographie nicht nur als ein Nebenfach, sondern auch nur zu gerne und leicht als eine Nebensache betreiben, und um einer Nebensache willen erst noch eine andere als Vorstudium zu treiben, dazu gehört mehr Eifer und auch mehr Zeit, als man bei den vielen Anforderungen, die gegenwärtig an die meisten gestellt werden, von ihnen verlangen kann.

Augen haben, um sich orientiren zu können. Die Augen werden aber nicht durch Rechnen, sondern allein durch Anschauung geübt.

Die Absicht des Verf. bei vorliegender Arbeit war nun die, ein näheres Verständniss der Krystalle zu eröffnen, soweit die Vorkenntnisse, die man auf unseren Gymnasien erwirbt, dies erlauben, so weit es mit elementaren Kenntnissen aus der Lehre von den Proportionen und der ebenen Geometrie sich erreichen lässt.

Dass auch zu einem noch ziemlich tief, wenn auch oft auf weiterem Wege, eingehenden Verständnisse nicht viel Vorkenntnisse nöthig sind, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die wenigen Lehrsätze betrachtet, von denen im Verlaufe Gebrauch gemacht worden ist, die der Verf. pag. 16 zusammengestellt hat, um später darauf verweisen zu können, und zugleich denen, die sich seines Grundrisses bedienen wollen, ein genaues Maas dessen zu geben, was zum Verständnisse desselben nöthig ist. Er hat alles das, was aus der Trigonometrie nöthig ist, nicht als bekannt vorausgesetzt, theils weil sie auf manchen Gymnasien gar nicht, theils auf eine andere veraltete Weise gelehrt wird, und daher einen kurzen Abriss derselben, so weit sie im Buche selbst angewendet ist, pag. 18—22 mitgetheilt.

Wie weit man auf diesem Wege und mit diesen Mitteln kommen könne, dafür liefern die Arbeiten von Weiss in den Abhandlungen der Berliner Academie den besten Beweis. Der Verf. freut sich hier öffentlich sich seinen Schüler nennen zu dür-

fen und zu gestehen, wie viel er ihm als seinem Lehrer verdanke, und wie ihm seine Art der Behandlung der Krystallographie stets als Muster vorgeschwebt habe.

Es würde ihm zur grossen Befriedigung gereichen, wenn er durch seine Arbeit bei recht vielen das vollkommene Verständniss und die verdiente Würdigung jener Abhandlungen vermitteln würde.

Der Verf. erkennt sehr wohl die Mangelhaftigkeit seiner Arbeit, und dass er um eine nachsichtige Beurtheilung in vielen Stücken zu bitten hätte; gegen einen Vorwurf will er sich aber im voraus besonders sichern, nehmlich den, dass er in vielen Fällen zu breit und ausführlich, namentlich in der Mittheilung von Berechnungen ohne alles Weglassen von Mittelgliedern gewesen sei. Es ist dies absichtlich geschehen. Er wollte lieber deutlich, als (im Sinne des Mathematikers) elegant sein. Er hat als Lehrer die Erfahrung gemacht, wie leicht namentlich durch Rechnungen, denen sie nicht vollständig und ohne besondere Anstrengung folgen können, eben die, welche die Krystallographie als Nebenfach treiben, abgeschreckt werden.

Es ist ein sehr grosser Unterschied, ein Instrument zu kennen, und damit zu operiren. Wer weiss, wie man Klavier spielt, und die Tasten und Noten kennt, kann deswegen doch noch nicht spielen. Es ist bei Rechnungen ähnlich; es kennt mancher die nöthigen Lehrsätze, kann sie aber des-

wegen noch nicht selbständig anwenden; die Uebung, durch die erst die Fertigkeit erworben wird, fehlt in den meisten Fällen allen denen, die nicht speciell Mathematik treiben. Der Verf. hat daher absichtlich vieles in der vollsten Ausdehnung mit Anführung der dazu nöthigen Sätze vorgerechnet und vorgetragen, Beispiele auf das ausführlichste entwickelt, um diesem Mangel an Uebung zu Hülfe zu kommen. Ob er es nicht oft zu bequem und zu leicht gemacht und dem selbständigen Studium dadurch Eintrag gethan habe, ist eine Frage, die er von erfahreneren Lehrern gerne beantwortet hätte.

Der Verfasser würde sich freuen, sie mit ja beantwortet zu erhalten, fürchtet aber nach seinen allerdings noch nicht ausgedehnten Erfahrungen, dass dieses nicht der Fall sein dürfte und dass er eher noch zu viel als zu wenig bei der Mehrzahl seiner Leser vorausgesetzt habe.

Bei der Bezeichnung der Krystallformen ist der Verf. der von Weiss eingeführten Weise gefolgt, hat aber überall bei den einfachen Körpern die von Naumann gebrauchte angegeben. Im Anhange finden sich für alle Systeme die beiderlei Arten übersichtlich neben einander gestellt, sowie auch die Formeln zur Berechnung der Combinationen aus den verschiedenen Kantenwinkeln nach Naumann.

Die Entfernung des Verf. von dem Druckorte und der Umstand, dass derselbe während des Druckes

der Tafeln nur schriftlich mit dem Lithographen verkehren konnte, mag einen Theil der Fehler und Unvollkommenheiten namentlich der Tafeln entschuldigen. Für diese, wie für die auf sein Theil kommenden, bittet um nachsichtige und für das Ganze um wohlwollende Beurtheilung

der Verfasser.

Inhalt.



Erklärung der Tafeln I – XIII.

Taf. I. Ueber die mittlere Figur (cfr. pag. 34).

Fig. 1 — 4. Uebergang aus dem Octaëder in das Granatoëder (Magneteisen).

„ 5 — 8. Uebergang aus dem Octaëder in den Würfel (Bleiglanz).

„ 9 u. 10. Uebergang aus dem Würfel in das Granatoëder (Flussspath).

„ 11 u. 12. Uebergang aus dem Octaëder in das Pyramidenoctaëder (Flussspath).

„ 13 — 15. Uebergang aus dem Octaëder in das Leucitoëder (Spinell).

„ 16. . . . Uebergang aus dem Granatoëder in das Leucitoëder (Granat).

Taf. II (Fig. 1) zeigt den Durchschnitt durch je 4 Dimensionen a und 4 s (Fig. 2) denselben durch je 2 Dimensionen a, 2 s und 4 t, wie er in den verschiedenen einfachen Körpern sich zeigt (cfr. pag. 34).

Fig. 17—18. Uebergang aus dem Würfel in einen Pyramidenwürfel (Flussspath).

„ 19. . . Uebergang aus dem Würfel in das Leucitoëder (Analcim).

„ 20. . . Uebergang aus dem Würfel in ein Hexakisoctaëder (Flussspath).

„ 21. . . . Uebergang aus dem Octaëder in einen Pyramidenwürfel (Spinell).

„ 22 — 23. Uebergang aus dem Octaëder in ein Hexakisoctaëder (Diamant).

„ 24. . . . Uebergang aus dem Granatoëder in das Leucitoëder und Pyramidengranatoëder (Granat).

Taf. III.

Fig. 26. . . . Combination des Rothkupfererzes und graphische Darstellung derselben Fig. 26 b (pag. 149).

Taf. IV.

Taf. V.

Taf. VI & VII. Krystalle des 2 und 1achsigen Systems.

Fig 57 u. 58. Spitzeres und stumpferes Octaëder.

„ 59. . . . Hauptoctaëder o, gerade Endfläche h, II. Säule a (Honigstein).

„ 60. . . . Hauptoctaëder o mit untergeordneter I. Säule g.

„ 61. . . . Hauptoctaëder o mit dem I. stumpferen d.

„ 62. . . . Dioctaëder do.

„ 63. . . . Hauptoctaëder o mit vorherrschender I. Säule g (Zirkon).

„ 64. . . . Hauptoctaëder o mit vorherrschender II. Säule a (Zirkon).

„ 65. . . . Combination des Zirkones mit der graphischen Darstellung derselben Fig. 65 b (cfr. pag. 201).

„ 66 . . . I. und II. Säule g und a mit dem Hauptoctaëder o und seinem I. stumpferen d mit vorherrschender I. Säule und Grundoctaëder (Zinnstein).

„ 67. . . . II. Säule a mit dem Hauptoctaëder o und dem Dioctaëder (a : $\frac{1}{3}$a : c) dρ (Zirkon).

„ 68 u. 69 r u. l. Tetraëder mit seinem eingezeichneten Octaëder.

„ 70 u. 71 r u. l. Hemidioctaëder mit seinem eingezeichneten Dioctaëder.

„ 72 u. 73 r u. l. Trapezoëder mit eingezeichnetem Dioctaëder (Salmiak).

Taf. VII.

Fig. 74. . . . I. und II. Säule a und g mit dem Hauptoctaëder o und seinem I. stumpferen d mit vorherrschender II. Säule und Hauptoctaëder (Zinnstein).

„ 75. . . . Combination des Hauptoctaëders o mit seinem ersten stumpferen d, dem 3fach stumpferen $\frac{1}{3}$o und dessen I. schärferen $\frac{2}{3}$d (Gelbbleierz).

„ 76 u. 77. Hemiedrische Combinationen des Tungsteines (cfr. pag. 209).

„ 78. . . . Hemiedrische Combination des tetragonalen Kupferkieses (cfr. pag. 208) r u. l. Tetraëder $\frac{o}{2}$ und $\frac{o'}{2}$ I. Säule g, I. spitzeres Octaëder 2d und Hemidioctaëder $\frac{do}{2}$.

---

*) Es ist eine ähnliche Combination wie Fig. 99, nur ist die hier senkrecht angenommene Achse c dort horizontal und als a angenommen (cfr. pag. 212).



Einleitung.

§. 1. Jeder unbelebte polyedrische ringsum von ebe-
n Flächen begränzte Körper, der seine Gestalt einer seiner
bstanz inwohnenden Kraft verdankt, wird ein *Krystall*
nannt. Diese Kraft — *Krystallisationskraft* — äus-
rt sich an ein und derselben Substanz stets auf dieselbe
eise, *) ist ebenso an dieselbe gebunden, wie die übrigen
ysikalischen und chemischen Eigenschaften, welche wir
n derselben wahrnehmen, und steht in so genauem Zu-
mmenhang mit jenen, dass wir mit der grössten Sicherheit
s bestimmten physikalischen Eigenschaften eines krystallini-
hen Körpers auf eine bestimmte Gestalt desselben schliessen
irfen, und umgekehrt eine bestimmte Krystallgestalt uns
stimmte physikalische Eigenschaften voraussagen lässt; z. B.
in Verhalten gegen Wärme, Licht und Electricität u. s. f.

§. 2. Da demnach die äussere Gestalt, der Umriss eines
ystalls nur der Ausdruck ist einer, der ganzen Substanz
wohnenden, allen Theilen derselben in gleicher Weise zu-
ommenden, ihr wesentlichen Eigenschaft, so kann dieser
ssere Umriss selbst verloren gehen, oder selbst nie vor-
anden gewesen sein, wenn z. B. der Raum zur vollkom-

*) Die wenigen Fälle von Dimorphismus abgerechnet, wo eine Substanz zweierlei Gestalten zeigt, wie der kohlensaure Kalk als Kalkspath und Aragonit, die dem allgemeinen Gesetze nur als vereinzelte Ausnahmen entgegenstehen.

menen Ausbildung fehlte, ohne dass dann eine von den Eigenschaften vermisst würde, welche wir an derselben Substanz wahrnehmen, wo wir sie als einen vollkommen ausgebildeten Krystall antreffen. Einen solchen Körper nennen wir dann nicht mehr einen Krystall, sondern einen krystallisirten, und können demnach alle Körper in Beziehung auf den Zustand, in welchem sich ihre Substanz befindet, in krystallinische und nicht krystallinische oder amorphe eintheilen. Alle Materie, die von der Lebenskraft bewegt und von ihr in irgend eine Form gebracht wird, ist im amorphen Zustande; was nicht von ihr durchdrungen wird, fällt der Krystallisationskraft anheim, und wird von ihr, wenn nicht äussere mechanische Kräfte ihr entgegenwirken und sie überwinden, in den krystallinischen Zustand versetzt.

Untersuchen wir einen Krystall oder einen krystallinischen Körper, so finden wir, dass allen das als gemeinschaftliche Eigenschaft zukommt, dass alle ihre Theile, wie das Ganze sich in bestimmten Richtungen auf eine ganz bestimmte Weise verhalten und zwar stets gleich in allen Theilen nach diesen bestimmten gleichen Richtungen hin, anders nach andern. Es zeigt sich dies auf das allerbestimmteste in ihren physikalischen Eigenschaften. In ein und derselben Richtung lässt sich ein krystallinischer Körper durch seine ganze Masse hindurch leichter ritzen, leichter spalten, als in den übrigen; in verschiedenen Richtungen wird er selbst verschieden durch die Wärme ausgedehnt; in bestimmten Richtungen zeigt er ein bestimmtes electrisches Verhalten durch seine ganze Masse hindurch, ganz verschieden von dem, was er hat, wenn wir eine andere Richtung durch ihn hindurch verfolgen. Am allerdeutlichsten tritt dies in dem Verhalten gegen das Licht, in den optischen Eigenschaften eines Krystalles hervor, an die (wie an die doppelte Strahlenbrechung, die Polarisation) ich hier nur zu erinnern brauche, da sie zu den allerbekanntesten physikalischen Eigenschaften

der krystallisirten Körper gehören. In einem amorphen Körper finden wir von allem dem nichts, die Masse verhält sich hier nach allen Seiten hin vollkommen gleich und indifferent, es ist nirgends eine Richtung wahrzunehmen, in welcher irgend eine Differenz in irgend einer Beziehung gegen die übrigen wahrzunehmen wäre. Ein und dieselbe Substanz, krystallinisch oder amorph zeigt uns daher ganz verschiedene Eigenschaften.

§. 3. Dem krystallinischen Zustande eines Körpers geht jedesmal der amorphe vorher, sei es nun, dass die Substanz, welche krystallisiren soll, aufgelöst war, oder durch Schmelzung im flüssigen Zustande, oder selbst im festen aber amorphen Zustande sich befunden habe. *) Das Wesen der Krystallisationskraft wird nun nach dem obigen in nichts weiter bestehen, als dass sie in einer amorphen, d. h. überall vollkommen sich gleich verhaltenden ganz indifferenten Masse ein verschiedenes Verhalten der Masse, eine Differenz in derselben hervorbringt, und zwar, wie wir sahen, eine Differenz in verschiedenen Richtungen, so dass sich jetzt die Masse *nicht* mehr gleich nach allen Richtungen hin, sondern nur nach bestimmten Richtungen gleich, nach andern hin ungleich verhält, was, wie wir in §. 2 sahen, die wesentliche Eigenschaft des krystallinischen Zustandes gegenüber dem amorphen ist. Mit dieser Aufhebung des indifferenten Zustandes in den innern Eigenschaften der Substanz durch die Krystallisationskraft muss aber auch zugleich eine Veränderung der äussern Gestalt auftreten. Denken wir uns eine im obigen Sinne amorphe Masse, deren Theile beweglich sind, so werden ihre Theile nur den Gesetzen der allgemeinen Anziehung folgend, sich alle gleich gegen einander verhaltend, nothwendig eine Kugelgestalt annehmen müssen. Tritt aber nun irgend eine Differenz in einer oder mehreren Rich-

*) cfr. Fuchs. Ueber die Theorien der Erde, den Amorphismus fester Körper etc. München 1844. p. 36.

tungen ein, verhalten sich also die Theile nicht mehr nach allen Seiten hin gleich, so kann auch die nur unter dieser Voraussetzung mögliche Gestalt nicht mehr sich erhalten. Aus dem Körper mit dem gleichen Verhalten nach allen Richtungen wird ein Körper mit gleichem Verhalten nach einer bestimmten Anzahl von Richtungen, aus dem polyedrischen Körper von unendlich viel Ebenen begränzt, der Kugel, wird einer, der von einer bestimmten Zahl von Ebenen eingeschlossen wird. Je mehr eine Richtung über andere vorherrscht, je mehr sie vor anderen die Masse beherrscht und sich in ihr geltend macht, und mit je grösserer Intensität sie über die allgemeine Anziehung Herr wird, — mögen wir uns nun vorstellen, dass die Theilchen der Masse in derselben sich stärker anziehen oder gegenseitig stärker abstossen, was für das äussere Ansehen gleiches Resultat haben wird, — desto grösser wird auch die Abweichung von der Kugelgestalt sein, die ein Krystall uns darbieten wird, und je weniger eine Richtung vor der andern sich geltend macht, je grösser die Anzahl von Richtungen ist, in welchen sich die Masse gleich verhält, desto geringer wird auch die Abweichung von der Kugelgestalt sein. Tritt zugleich die Krystallisationskraft mit geringer Intensität auf, macht sich die allgemeine Anziehungskraft zwischen den verschiedenen Richtungen noch bemerkbar, so werden die einzelnen Flächen wieder das Bestreben kund geben, sich zur Kugeloberfläche zu gestalten und eine gerundete Form annehmen, wie dies z. B. beim Achtundvierzigflach des Diamanten so deutlich sich ausspricht; ein Zustand, der mit Recht vom Krystallographen als der der Unvollkommenheit bezeichnet wird.

§. 4. Da wir in einem Körper eine unendliche Menge von Richtungen und jede von dieser über die andere prädominirend, oder ihnen gleich annehmen können, eine gewisse Anzahl unter sich gleich, und anderen, wieder unter einander gleichen, entgegengesetzt u. s. f. kurz die verschiedensten

Combinationen uns vorstellen können, so lässt sich auch eine unendliche Reihe von Krystallisationsgesetzen denken. In der Natur finden wir aber dieselben auf wenige und noch dazu sehr einfache Fälle reducirt. Betrachten wir nehmlich die vollkommen ausgebildeten Krystalle und suchen wir aus ihrer äussern Erscheinung zu enträthseln, welche Richtungen die für jeden speziellen Fall characteristischen sind, auf die wir seine Begränzungselemente *) zurückführen können, die uns zugleich den leitenden Faden an die Hand geben sollen, um uns in der Fülle von Formen, die wir sehen, zurecht zu finden, so werden wir bald gewahr, dass wir, wie überall in der Natur, auch hier finden, dass sie die Einfachheit liebt, dass wir am besten und vollständigsten zur Einsicht des Ganges kommen, den die Natur bei der Bildung der Krystalle verfolgt, dass wir auf die einfachsten und allgemeinsten Gesetze der Krystallisation geführt werden, wenn wir in unsern Annahmen auch von den möglichst einfachen Voraussetzungen ausgehen.

§. 5. Welchen ausgebildeten Krystall wir auch betrachten mögen, immer werden wir die Beobachtung machen, dass er an entgegengesetzten Stellen ein oder mehrere gleiche Begränzungselemente zeigt. Denken wir uns alle gleichen durch Linien verbunden, die von gleichen Puncten je zweier oder mehrerer ausgehen, so werden wir finden, dass sich diese Linien alle in einem Puncte — dem Mittelpuncte — des Krystalles schneiden, und dass um diesen Punct herum alle gleichen Flächen und Begränzungselemente in symmetrischer Lage und in gleicher Entfernung zu liegen kommen, was nicht mehr der Fall sein wird, wenn wir willkührlich andere sich in einem andern Punct schneidende oder nicht gleiche Begränzungselemente verbindende Linien als die der speziellen Krystallform zu Grunde liegenden Richtungen, in

*) Unter Begränzungselementen sind Flächen, Kanten und Ecken zu verstehen.

welcher die Krystallisationskraft wirkte, annehmen wollten. Wir werden daher vor Allem bei der Wahl dieser Richtungen darauf achten müssen, um sie in Uebereinstimmung mit den natürlichen zu bringen, dass sich alle gleichen und symmetrisch gelegenen Flächen auch in gleicher und symmetrischer Lage zu dem Durchschnittspunct unserer supponirten Richtungen und zu diesen Richtungen selbst befinden. Es kommen natürlich Fälle vor, wo man in der Wahl dieser Richtungen schwankend sein kann, indem mehrere Arten von Linien aus dem Mittelpunct des Krystalles nach gleichen Begränzungselementen gezogen, der eben ausgesprochenen Hauptbedingung entsprechen. So kann man z. B. den Würfel auf eine Fläche stellen und 3 Richtungen annehmen, die die Mittelpuncte je zweier entgegengesetzter Flächen verbinden und sich alle 3 im Mittelpuncte unter einem rechten Winkel schneiden, oder kann ihn auf ein Eck gestellt denken und 4 Richtungen annehmen, die je 2 entgegengesetzte Ecken verbindend einander ebenfalls im Mittelpunct aber nicht unter rechten Winkeln schneiden, und wovon je 2 und 2 in eine Ebene fallen, die senkrecht ist auf der Ebene der beiden andern, oder man kann in derselben Stellung 4 Richtungen annehmen, wovon eine 2 entgegengesetzte Ecken, die übrigen 3 die Mittelpuncte von den gegenüberliegenden 6 zu keinem der beiden vorigen Ecken gehenden Kanten verbindet; diese 3 letzteren schneiden sich unter Winkeln von 60°, die erste ist dann senkrecht auf den 3 andern. In allen diesen Fällen liegen um diese verschiedenen Richtungen die gleichen Begränzungselemente in symmetrischer Lage. In solchen Fällen wird man, wenn man der einfachsten Annahme den Vorzug giebt, immer am besten auskommen und bei weiterer Verfolgung bald bemerken, dass man mit ihr die einfachsten und naturgemässesten Resultate, namentlich auch bei Berücksichtigung der physikalischen Verhältnisse eines gegebenen Krystalles erhalten wird.

§. 6. Man nennt diese innerhalb eines Krystalls angenommenen Linien, deren Länge stets einen bestimmten endlichen Werth durch die sie schneidenden Krystallflächen erhält, Achsen, die Theile derselben, welche eine bestimmte Fläche von ihnen gehörig verlängert abschneiden würde, oder wirklich abschneidet, die Parameter der Fläche. Ist wirklich der Unterschied in gewissen Richtungen der Masse eines Krystalls, der sich durch alle Theile derselben in gleicher Weise geltend macht, das Wesentliche und die Grundbedingung aller Eigenschaften desselben, also auch der äussern Erscheinungsweise, so werden wir auch als nothwendige Folge hieraus zu der Annahme kommen, dass, so mannichfach auch die äussere Erscheinungsweise eines Krystalles sein mag, so vielfach auch an ihm die Flächen sich häufen mögen, doch keine darunter sein darf, welche dem Gesetze, das wir in Beziehung auf seine Hauptrichtungen für diesen Krystall, sei es aus einzelnen Flächen oder aus physikalischen Eigenschaften hergeleitet haben, widerspräche; alle Flächen eines Krystalls müssen sich auf ein und dieselben Richtungen, die wir für ihn angenommen haben, also auf dieselben Achsen zurückführen lassen, oder unsere Annahme ist falsch. Haben wir z. B. für einen Krystall 3 unter sich rechtwinklige gleiche Achsen angenommen, so müssen auch alle Flächen, die wir an ihm wahrnehmen, sich auf diese zurückführen lassen und alle gleichen Flächen müssen in einem gleichen Verhältnisse zu diesen stehen; wir dürfen nicht für einige Flächen andre Achsen, ein anderes Symmetriegesetz für sie, als für die andern annehmen wollen. Und in der That, diese Voraussetzung bestätigt sich auch in der Natur, und macht es uns möglich unter der grossen Menge möglicher Annahmen von Verschiedenheiten der Achsen gewisse auszuwählen, unter welche sich die wirklich vorkommenden Krystalle, zu Gruppen vereinigt, unterbringen lassen. Diese Gruppen nun hat man Krystallisationssysteme genannt. Sämmtliche bis jetzt

beobachtete, wirklich vorkommende Krystallisationssysteme lassen sich in 2 Klassen theilen. Die erste Klasse umfasst alle diejenigen Krystalle, welche sich auf 3 einander rechtwinklig schneidende Richtungen zurückführen lassen, sg. trimetrische Gestalten. Die zweite Klasse enthält diejenigen, welche sich auf 4 Richtungen beziehen, von denen 3 sich unter 60° schneiden, die vierte senkrecht auf den übrigen steht, sg. tetrametrische Gestalten.

Innerhalb der I. Klasse unterscheidet man wieder nach der Verschiedenheit, die sich in den 3 rechtwinkligen Richtungen oder Achsen, wie wir es jetzt kürzer und mehr geometrisch als physikalisch ausdrücken wollen, geltend macht, folgende Krystallisationssysteme:

1) Das reguläre System. Alle 3 Achsen sind gleich.
2) Das 2- und 1achsige. 2 Achsen sind gleich, die 3te verschieden von den beiden andern.
3) Das 1- und 1achsige. Alle 3 Achsen sind von einander verschieden.
4) Das 2- und 1gliedrige. Alle 3 Achsen sind von einander verschieden, ja es tritt noch eine neue Verschiedenheit im Verhalten einer Achse gegen die beiden andern ein, sie zeigt ein verschiedenes Verhalten gegen diese in ihrer vordern und ihrer hintern Seite.
5) Das 1- und 1gliedrige. Die eben erwähnte Verschiedenheit in einer der 3 Achsen macht sich auch noch nach den andern Seiten nach rechts und links hin geltend.
6) Das 3- und 1achsige. Die obenerwähnte II. Klasse ohne Unterabtheilungen.

§. 7. Die Lage einer jeden Fläche ist genau bestimmt, wenn wir wenigstens 3 Puncte von ihr, die nicht in einer geraden Linie liegen, in ihrer Lage kennen. Zur Bestimmung der Lage der Krystallflächen giebt man nun an, in welcher Entfernung vom Mittelpuncte des Achsensystems sie

3 oder 4 Achsen oder deren Verlängerung schneidet, mit andern Worten die Werthe ihrer Parameter. Damit haben wir aber zugleich die ganze Krystallform bestimmt, sowie wir wissen in welches System ein bestimmter Krystall gehöre, indem wir nach dem, jedem Krystallisationssystem eigenen Symmetriegesetze sogleich wissen, wie oft diese bestimmte Fläche dem Wesen des Krystallisationsprocesses gemäss, dass sich die Masse stets gleich verhalte in allen gleichen Richtungen, also auch gleich in Beziehung auf Flächenbildung, in dem bestimmten Krystallisationssysteme vorkommen kann. Ganz allgemein für alle Krystallisationssysteme gültig lässt sich dieses Gesetz so aussprechen: Dieselbe Erscheinungsweise, die uns ein Krystall an einer Stelle zeigt, findet sich stets wieder an allen gleich gelegenen und sich gleich verhaltenden übrigen Stellen; jede Veränderung, die ein Begränzungselement des Krystalles durch den Krystallisationsprocess erleidet, erfahren in gleicher Weise alle übrigen diesem gleichen.

§. 8. Nach der Definition, die wir von einem Krystall geben, ist jeder von ebenen Flächen vollkommen begränzt, daraus folgt unmittelbar, dass diese Flächen sich in verschiedenen Richtungen und Puncten schneiden müssen. Wo 2 Flächen sich schneiden, bilden sie mit einander eine Kante, wo 3 oder mehrere zusammenstossen eine Ecke. Flächen, Kanten und Ecken sind also die Begränzungselemente eines Krystalls. Eine Fläche ist Begränzungselement nur innerhalb desjenigen Raumabschnittes, wo sie dem Mittelpuncte des Körpers näher liegt, als alle andern; wo sie mit einer beliebigen andern ihr nicht parallelen gleich weit entfernt liegt, bildet sie mit dieser eine Kante, wo sie mit 3 oder mehreren gleiche Entfernung vom Mittelpuncte hat, stösst sie mit diesen zu einer Ecke zusammen.

§. 9. Nach dem Winkel, den 2 in einer Kante zusammenstossende Flächen bilden, dem Kantenwinkel, heisst die Kante selbst eine stumpfe, oder eine scharfe. Der

Kantenwinkel wird gemessen durch 2 von einem beliebigen Puncte der Kante aus auf ihr senkrecht stehende und auf den Flächen gezogene Linien, welche die Kante bilden. Haben 2 oder mehr Kanten gleiche Länge, so heissen sie gleichlang, sind sie gleichwinklig, gleichgross, und vereinigen sie beide Eigenschaften, gleich.

§. 10. Die Ecken werden benannt: 1) nach der Zahl der Flächen oder Kanten, die in einem zusammenstossen, 3flächig, 6flächig, 3kantig, 6kantig; 2) nach der Beschaffenheit ihrer Kanten reguläre, symmetrische oder halbregelmässige und irreguläre. Die ersteren zeigen lauter gleiche Flächen- und Kantenwinkel. Die symmetrischen haben gleiche Flächen-, aber nur abwechselnd gleiche Kantenwinkel, und jederzeit eine gerade Zahl von Flächen. Die Ecken, denen keine der erwähnten Eigenschaften zukommt, heissen irregulär.

§. 11. Eine Krystallform, die von lauter gleichen und ähnlichen — gleichnamigen — Flächen begränzt wird, heisst eine einfache Form; treten ungleichnamige Flächen an einer Form auf, so wird diese eine zusammengesetzte genannt. Die Kanten und Ecken einer einfachen Form können alle gleich sein, wie es z. B. beim Würfel oder Octaëder (Taf. I, Fig. 1 und 8) der Fall ist, eben so oft sind sie aber ungleich, wie z. B. beim Leucitoëder (Fig. 15). Umgekehrt hat manchmal eine zusammengesetzte Form lauter gleiche Kanten und Ecken, ohne deswegen eine einfache Form zu werden, wie z. B. der sg. Mittelkrystall zwischen Würfel und Octaëder (Fig. 6). Denkt man sich an einer zusammengesetzten Form die gleichnamigen Flächen so vergrössert, dass alle übrigen dadurch zum Verschwinden kommen, bis sie also allein unter einander sich schneiden, so werden diese für sich eine einfache Form bilden; eben dasselbe gilt von den übrigen gleichnamigen Flächen. Eine zusammengesetzte Form ist also aus soviel einfachen Formen zusam-

mengesetzt, als sie verschiedene Arten von gleichnamigen Flächen enthält, sie ist eine Combination von verschiedenen einfachen Formen.

§. 12. Die Flächen einer jeden einfachen Form in einer Combination können natürlich nicht in ihrer vollen Ausdehnung erscheinen, da sich zwischen dieselben die Flächen der übrigen, die Combination mit bildenden Flächen einschieben, und deshalb Theile von denselben abzuschneiden scheinen. Aus dem in §. 8 über die Begränzungselemente gesagten geht hervor, dass die Flächen einer zweiten einfachen Form, welche zu einer andern hinzutritt, nur an der Stelle von einer Kante oder Ecke derselben sich geltend machen können, und sie soweit aus der alleinigen Begränzung des Körpers verdrängen, als sie dem Mittelpuncte desselben näher liegt, als die andern. Die Art und Weise, wie durch die Flächen einer hinzutretenden Gestalt, die Ecken und Kanten einer als ursprünglich allein vorhanden gedachten verändert erscheinen, lassen sich an den Kanten sowohl wie an den Ecken auf dreierlei verschiedene Arten reduciren. Da meistens eine der einfachen in einer Combination enthaltenen Gestalten ihre Flächen in grösserer Ausdehnung zeigt, als die übrigen, die als untergeordnete Gestalten auftreten, so nennt man jene die vorherrschende oder die Grundgestalt und giebt von ihr an, wie durch die untergeordneten Gestalten ihre Kanten und Ecken verändert erscheinen. Ist an der Stelle einer Kante der Grundform eine Fläche einer untergeordneten Gestalt vorhanden, so nennt man nach Werner's allgemein angenommener Bezeichnung die Kante abgestumpft. Ist die Abstumpfungsfläche gleich geneigt gegen beide Flächen der abgestumpften Kante, so heisst sie eine gerade, ausserdem eine schiefe. Sind an die Stelle einer Kante 2 neue gleichartige Flächen getreten, so nennt man die Kante zugeschärft.

Ist an die Stelle eines Eckes eine Fläche getreten, so bezeichnet man auch hier das Eck als abgestumpft, und zwar als gerade, wenn die neue Fläche gegen die gleichen, ein Eck bildenden Flächen gleiche Neigung hat, im andern Falle als schief. Man bezeichnet die Abstumpfungsfläche als gerade aufgesetzt auf die Kante, wenn sie gleich geneigt ist gegen beide Flächen der betreffenden Kante, im entgegengesetzten Falle als schief aufgesetzt; gerade aufgesetzt auf eine Fläche, wenn die ebenen Winkel, welche durch die neue Kante und die alten, gegen das abgestumpfte Eck zu laufenden, an beiden Seiten der betreffenden Fläche gebildet werden, gleich sind, ausserdem ebenfalls schief aufgesetzt.

Sind statt eines Eckes 2 Flächen vorhanden, so nennt man ebenfalls das Eck zugeschärft; die Zuschärfungsflächen können auf die Kanten oder die Flächen, gerade oder ungerade, in demselben Sinne wie es bei den Abstumpfungsflächen des Eckes gebraucht wird, aufgesetzt sein.

Eine Ecke ist zugespitzt, wenn an ihre Stelle eine andere stumpfere getreten ist. Die Ecke besteht aus halb, oder gerade, oder doppelt so viel Flächen, als das alte Eck, und auch hier sind die Zuspitzungsflächen gerade oder schief, auf Kanten oder Ecken aufgesetzt.

§. 13. Es tritt sehr oft der Fall ein, dass mehrere Flächen einer zusammengesetzten Gestalt sowohl, wie einer einfachen, alle ein und derselben Linie parallel laufen und daher, wenn sie sich schneiden, Kanten bilden, welche einander und der ebenerwähnten Linie parallel sind. Geht man von einer beliebigen solchen Linie oder Kante aus und sucht nun, welche andere Flächen oder Kanten mit der, von welcher man ausgeht, parallel laufen, und verfolgt diese Richtung um den ganzen Krystall herum, bis man zuletzt von der entgegengesetzten Seite her wieder zum Ausgangspunct

zurückgekehrt ist, so wird man auf diese Weise alle die Flächen, welche jene obenerwähnte Eigenschaft des Kanten-Parallelismus zeigen, gleichsam wie einen Gürtel den Krystall in der Richtung des Weges, den man bei Aufsuchung derselben genommen, umgebend finden. Man hat daher eine solche Mehrheit von Flächen eine Zone genannt, und die Linie, welcher alle gemeinschaftlich parallel laufen, Zonenachse. Ein und dieselbe Fläche muss mit ihren verschiedenen Kanten verschiedenen Zonen angehören. Kennen wir nun 2 verschiedene Zonen, in welche eine ihrer Lage nach noch unbekannte Fläche gehört, so ist uns dadurch die Lage einer Fläche selbst auf das genaueste bestimmt, da 2 verschiedene und uns bekannte Zonen uns immer 3 nicht in einer geraden Linie liegende Puncte aus der unbekannten Fläche als bekannt angeben, und uns damit auch die Lage der ganzen Fläche nun mit Sicherheit bestimmen lassen. Ein Beispiel möge dies deutlicher machen. Sehen wir z. B. an einem Würfel (Taf. I, Fig. 7) die gerade Abstumpfung der Ecken in dieser Beziehung an. Gehen wir von einem obern Ecke aus, so finden wir, dass die Kante h zwischen der Abstumpfungsfläche und der Würfelfläche parallel der Würfelflächendiagonale läuft; derselben läuft auch parallel die gleiche Kante h′ des abgestumpften hinteren oberen Würfeleckes; wenn wir weiter um den Würfel herumgehen, finden wir denselben Parallelismus einer Kante h″ am hinteren unteren und einer h‴ vorn am unteren Ecke. Diese Flächen gehören also alle einer Diagonalzone, wie wir sie nennen wollen, des Würfels an. Zu gleicher Zeit bilden dieselben Flächen aber ebenso parallele Kanten mit den beiden andern Diagonalen der Würfelflächen, welche sie schneiden, gehören also auch in 2 andere Diagonalzonen. Schon durch 2 derselben ist aber die Lage der Fläche vollkommen bestimmt, es kann nur diese eine bestimmte Fläche, die Octaëderfläche, in 2 solche Diagonalzonen zugleich fallen. Alle übrigen, die

ebenfalls in die eine Diagonalzone fallen, wie z. B. die verschiedenen auf die Würfelfläche aufgesetzten Zuspitzungsflächen der Ecken, gehen, (Tab. II, Fig. 19) nicht mehr einer zweiten oder allen dreien parallel, gehören nicht in mehrere Diagonalzonen.

Da sich nun schon durch die einfache Beobachtung bei deutlich ausgebildeten Krystallen solcher mehrfacher Parallelismus der Kanten verschiedener Flächen wahrnehmen lässt, so ist uns dadurch ein Mittel an die Hand gegeben, in vielen Fällen durch eine einfache Construction oder Berechnung die Lage einer Fläche, die Werthe ihrer Parameter ohne alle weitere Messung genau zu bestimmen, wenn wir sie nehmlich als zu 2 oder mehreren verschiedenen Zonen gehörig erkannt haben, welche uns schon bekannt sind. Wir werden später bei Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme noch öfter auf die Wichtigkeit dieser Zonenverhältnisse zurückgeführt werden, und unterlassen daher jetzt eine noch weitere Erörterung derselben.

§. 14. In allen Krystallsystemen bemerkt man ziemlich häufig, dass nicht alle Flächen, die eine gleiche Lage gegen gleiche Achsen haben, ausgebildet sind, sondern, dass ein Theil derselben nach bestimmten Gesetzen vorherrschend wird über die andern, sich übermässig ausdehnt und dadurch andere, der Lage nach gleiche, entweder vollkommen, oder bis auf geringe Reste aus der Begrenzung des Körpers verdrängt, sie zum Verschwinden bringt. Diese Art der Erscheinung nennt man Meroëdrie, meroëdrisches Verhalten im Gegensatz zu derjenigen, bei der alle gleich gelegenen Flächen auch gleichmässig ausgebildet sind, der Homoëdrie, oder dem homoëdrischen Verhalten eines Krystalles. Das häufigste Vorkommen ist das, dass die eine Hälfte der Flächen die andere verdrängt — Hemiëdrie, hemiëdrisches Verhalten — doch erscheint auch manchmal nur ein Viertel der gleichen Flächen, Tertartoëdrie, oder selbst nur ein Drittel oder Sechstel Trito-Hectoëdrie.

Suchen wir für dieses eigenthümliche Verhalten eine physikalische Erklärungsweise, so werden wir zu der Annahme hingeführt, dass wir nicht nur in verschiedenen Richtungen verschiedenes Verhalten der Masse eines Krystalles vor uns haben, sondern dass auch in sonst gleich sich verhaltenden Richtungen Differenzen eintreten in den Seiten *) derselben, oder in ihrem oberen und unteren Ende. Als Analogie für ersteres bietet sich uns das Verhalten des Lichtstrahles dar, welcher, wenn er polarisirt ist, ja ebenfalls eine solche Verschiedenheit nach seinen Seiten hin erkennen lässt; das letztere ist weniger befremdlich, indem uns das polare Verhalten der Electricität und des Magnetismus eine solche Annahme als höchst natürlich erscheinen lässt, zumal wenn wir, wie beim Turmalin **), Borazit u. s. w. finden, dass ein genauer Zusammenhang nachzuweisen ist zwischen den electrischen Eigenschaften und der Erscheinung von den bestimmten Flächen an den entgegengesetzten Enden eines Krystalles. Die nähere Erörterung der meroëdrischen Erscheinungen bleibt ebenfalls am besten der Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme aufgespart, zu der wir jetzt übergehen wollen.

Die Berechnungen, welche in den folgenden §§. vorkommen, beruhen auf folgenden wenigen bekannten Sätzen der Arithmetik und Geometrie. Um sie nicht öfter wiederholen oder ausführlicher anführen zu müssen, sind sie hier alle vorangestellt und numerirt, und die im Folgenden bei Rechnungen citirten Zahlen beziehen sich auf den Satz, von welchem im speziellen Falle Gebrauch gemacht wurde.

*) cfr. Weiss. Ueber eine verbesserte Methode . . . . nebst Bemerkungen über den Zustand von Polarisirung der Seiten in den Linien der krystallinischen Structur. Abh. d. Ac. d. Wiss. z. Berl. a. d. I. 1816—17. p. 328.

**) cfr. Gu. Rose. Ueber den Zusammenhang zwischen der Form und der electrischen Polarität der Krystalle. Abhandl. der K. Ac. d. Wiss. z. Berl. a. d. I. 1836. p. 215.

A. Sätze aus der Lehre von den geometrischen Proportionen.

1. Jedes geometrische Verhältniss ist gleich einem Bruche $a:b = \frac{a}{b}$, $a:b = c:d$ ist daher einerlei mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2. Das Product der äussern Glieder ist stets gleich dem Producte der beiden innern Glieder, d. h. in der Proportion $a:b = c:d$ ist $ad = bc$.

3. Aus den 4 Factoren zweier gleicher Producte lassen sich daher allemal geometrische Proportionen bilden, die jedoch so geordnet sein müssen, dass das eine Product die äussern, das andere die innern Glieder liefert oder umgekehrt,
   aus $ad = bc$ wird daher $a:b = c:d$,
   oder $a:c = b:d$, oder $b:a = d:c$ u. s. f.

4. Ist $a:b = c:d$, so ist immer
   a) $a + b : b = c + d : d$ b) $a - b : b = c - d : d$,
   c) $a + b : a = c + d : c$ d) $a - b : a = c - d : d$.

5. Ist $x : y = a : b$, so ist $x = \frac{a}{a+b}(x + y)$,
   $y = \frac{b}{a+b}(x + y)$.

6. Man kann die Glieder jedes Verhältnisses mit ein und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, ohne dass dasselbe dadurch verändert wird, also auch statt jedes Verhältnisses ein anderes ihm gleichwerthiges substituiren; ist $a:b = c:d$ u. $c:d = e:f$, so ist auch $a:b = e:f$.

B. Sätze aus der Geometrie.

1. Wenn sich 2 gerade Linien schneiden, wie $a'na'$ und ana Fig. XII, so entstehen dadurch 2 Paare gleicher Winkel, es wird $\measuredangle\, x = r$ und $\measuredangle\, v = w$. Solche Winkel heissen Scheitelwinkel.

2. Wenn 2 parallele Linien z. B. CX und sal (Fig. X) von einer dritten geraden qp geschnitten werden, so wird $\sphericalangle$ v = z = w, und $\sphericalangle$ r = t = X = h.
3. Die 3 Winkel eines Dreieckes sind stets = 2 rechten = 180°.
4. Sind 2 Winkel eines Dreieckes gleich zweien eines anderen, so ist auch der dritte Winkel gleich.
5. 2 Dreiecke sind einander gleich, wenn ihre 3 Seiten, oder 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder 2 Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel oder eine Seite und die drei Winkel als gleich erkannt werden, mit andern Worten: ein Dreieck ist durch eine der angegebenen Verbindungen von Seiten und Winkeln seiner Form und seinem Inhalt nach bestimmt.

6) Dreiecke sind ähnlich, wenn bei Verschiedenheit der Seiten ihre Winkel einander gleich sind, z. B. Fig. XI ist $\triangle$ as'l $\sim$ am's $\triangle$ as'v $\sim$ am'm. In ähnlichen Dreiecken stehen die 3 Seiten in gleichem Verhältnisse zu einander, z. B. Fig. XI ist as' : s'l : la = am' : m's : sa; — am' : as' = m's : s'l u. s. f.

7) Wird in einem Dreiecke parallel einer Seite eine Linie gezogen, so schneidet diese die beiden andern Linien proportionirt. Ist z. B. s'v (Fig. XI) parallel m'm, so ist

a) as : av = am' : am, ferner
b) as' : am' = s'v : m'm
c) am' : s'm = am : mv u. s. f.

8) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenusa gleich dem Quadrate der beiden Katheten z. B. Fig. IV $(ag')^2 = (g'c)^2 + (ca)^2$

also $ag' = \sqrt{(g'c)^2 + (ca)^2}$ $ca = \sqrt{(ag)^2 - (gc)^2}$ und $g'c = \sqrt{(ag)^2 - (ca)^2}$.

9. Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus dem rechten Winkel ein Perpendikel auf die Hypotenusa, z. B. sr in dem △ g's g (Fig. IV), so entstehen dadurch 2 kleinere Dreiecke rsg und rsg', welche beide dem grossen Dreiecke s'gg ähnlich sind, mit dem sie beide einen rechten Winkel an r und von denen das kleine △ rsg den Winkel an g, das grössere den Winkel an g' gleich, also auch beide den dritten gleich haben. Nach B 6 sind also diese 3 Dreiecke ähnlich, und es ist daher nach B 7 in Fig. IV rs : gs = g's : gg' daraus wird $rs = \frac{gs \,.\, g's}{g'g}$ d. h. das Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreiecke, aus dem rechten Winkel auf die Hypotenusa gefällt, ist gleich dem Producte der beiden Katheten dividirt durch die Hypotenusa.

C. Sätze aus der Trigonometrie.

Es seien (Fig. XLIX) uns die rechtwinklig auf einander stehenden Linien a und b gegeben, so ist uns dadurch (nach B 5) das Dreieck C wv bestimmt, also auch der Winkel α. Nach B 7 ist aber Cw : wv = Cx : xy. Es ändert sich daher an diesem Verhältnisse vw : wC und a : b nichts, von welchem Puncte des Schenkels Cy aus wir auch yx auf Cx senkrecht ziehen; wir erhalten immer unter der Voraussetzung, dass die beiden Linien a und b oder yx und xC etc. senkrecht auf einander seien, dieselben Verhältnisse, ähnliche Dreiecke, und somit bleibt der Winkel α unverändert; unter derselben Voraussetzung bleibt derselbe auch unverändert, wenn uns das Verhältniss von a : c = yx : yC oder b : c = Cx : cy gegeben ist. Die verschiedenen zur Bestimmung und Berechnung eines Winkels α hinreichenden Verhältnisse zweier solcher Linien haben nun besondere Namen erhalten, nehmlich:

I. a) das Verhältniss $a:c=\frac{a}{c}$ (A 1) heisst Sinus, geschrieben sin. α

b) „ „ $b:c=\frac{b}{c}$ „ Cosinus „ cos. α

c) „ „ $a:b=\frac{a}{b}$ „ Tangens „ tg. α

d) „ „ $b:a=\frac{b}{a}$ „ Cotangens „ ctg. α

e) „ „ $c:a=\frac{c}{a}$ „ Cosecans „ cosec. α

f) „ „ $c:b=\frac{c}{b}$ „ Secans „ sec. α.

Aus jedem dieser Ausdrücke lassen sich durch einfache arithmetische Operationen die übrigen entwickeln. So findet man aus dem Ausdrucke von sin. und cos. $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ $sin:cos=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=a:b=\frac{a}{b}$ d. h. (A 1) $\frac{sin}{cos}=tg.$ und umgekehrt aus dem Ausdrucke $tg=\frac{a}{b}$, wenn man Zähler und Nenner mit c dividirt $tg=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{sin}{cos}$; dividirt man beide Seiten der Gleichung $a^2+b^2=c^2$ mit c^2, so erhält man $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$ d. h. $sin^2+cos^2=1$ und $sin=\sqrt{1-cos^2}$ $cos=\sqrt{1-sin^2}$

g) Das Verhältniss von sin : cos $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=a:b$ ist wie das der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete zu der demselben anliegenden. Da diese Linien für die bei den Krystallen vorkommenden Winkel meist leicht zu construiren und zu berechnen sind, oder selbst mit den Achsen zusammenfallen, so begnügen wir uns im folgenden damit, stets das Verhältniss von sin : cos anzugeben. Nach B 5 ist ein Dreieck

durch 3 seiner Stücke, worunter wenigstens eine Seite sein muss, bestimmt. Hat man daher die Gleichungen (Werthe) für 3 Stücke, so lassen sich die übrigen daraus leicht berechnen. Es sei nun (Fig. L) ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck, dessen Seiten BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$ seien; fällt man nun in demselben das Perpendikel CD, so ist $\frac{AD}{AC} = \cos\alpha$ (nach C I b), also $AD = AC \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\alpha$, $\frac{BD}{BC} = \cos\beta$, also $BD = a \cdot \cos\beta$, also AD + DB d. h. $c = a \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$. Auf dieselbe Weise findet man für die übrigen Seiten die entsprechenden Ausdrücke; es ist daher in jedem spitzwinkligen Dreiecke

II. a) $c = a \cos\beta + b \cos\alpha$

b) $b = a \cos\gamma + c \cos\alpha$

c) $a = b \cos\gamma + c \cos\beta$;

fällt man in einem stumpfwinkligen Dreiecke ein Perpendikel CD (Fig. LI) auf die verlängerte Seite AB aus einem der spitzen Winkel, so ist AB d. h. $c = BD - AD$. Nun ist $\frac{BD}{CB} = \cos\beta$ (C I b) und da $CB = a$, $BD = a \cos\beta$. Ferner $\frac{AD}{AC}$ d. h. $\frac{AD}{b} = \cos\delta$ d. h. $= \cos(180 - \alpha)$ also $AD = b \cos(180 - \alpha)$ folglich $c = a \cos\beta - b \cos(180 - \alpha)$. Behält man fest, dass, wie aus der Formel hervorgeht, der Cosinus eines stumpfen Winkels = ist dem Cosinus seines spitzen Nebenwinkels, denselben negativ genommen, so kann man auch ohne weiteres obige 3 Formeln II a, b und c auf stumpfwinklige Dreiecke übertragen. — Wir werden im folgenden häufiger davon Gebrauch machen, aus 3 bekannten Seiten die Winkel eines Dreieckes zu finden, und wollen daher die Formeln für die Winkel aus den gegebenen Seiten finden. Setzt man z. B. in die Formel C II c den Werth von $\cos\beta$ aus II a und den Werth von $\cos\gamma$ aus II b ein, so erhält

man $a = b\left(\frac{b - c\cos\alpha}{a}\right) + c\left(\frac{c - b\cos\alpha}{a}\right)$ dies giebt

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Eliminirt man α und γ u. dann α und β, so wird

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, woraus man findet:

III. a) $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

b) $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

c) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

d. h. der Cosinus eines Dreieck-Winkels ist stets = der Summa der Quadrate der ihn einschliessenden Seiten minus dem Quadrate der ihm gegenüberliegenden Seite, dividirt durch das doppelte Product der ihn einschliessenden Seiten. *)

Es lässt sich geometrisch leicht die Richtigkeit dieser Formeln erweisen. Es ist (B 8) Fig. L.

$a^2 = (CD)^2 + (BD)^2$ i. e. $= (b^2 - (AD)^2 + (c - AD)^2$

$= b^2 + c^2 - 2c\,AD$, aber

AD (s. oben) $= b\cos\alpha$, also

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ wie oben.

Auf ähnliche Weise lässt es sich für b^2 und c^2 und für stumpfwinklige Dreiecke beweisen.

Eine öfter vorkommende Aufgabe ist die, aus den Sin. und Cosin. 2er Winkel Sin. und Cosin. für die Summa der beiden Winkel zu finden. Man findet hiefür

IV. a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Es lassen sich diese beiden Formeln aus den bisher gegebenen ebenfalls durch einfache arithmetische Operationen ableiten. Leichter ist es für uns hier, den Beweis geometrisch zu liefern.

*) Auch hier ändert sich natürlich für den stumpfen Winkel das Zeichen, d. h. sein Cos. wird negativ.

Es seien (Fig. LII) α und β die beiden gegebenen Winkel. Man ziehe nun BD senkrecht auf CD, DE und BA senkrecht auf CE, DF auf BA, so ist FA = DE, FD = AE und

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BA}{BC} \text{ (C, I a)} = \frac{BF+FA}{BC} = \frac{BF+ED}{BC}$$

$$= \frac{BF}{BC} + \frac{ED}{BC} = \frac{BF \cdot BD^{*}}{BC \cdot BD} + \frac{ED \cdot CD^{*}}{BC \cdot CD} = \frac{BF \cdot BD}{BD \cdot BC} + \frac{ED \cdot CD}{CD \cdot BC}.$$

Nun ist aber $\measuredangle$ GBD oder FBD = ACG = α indem $\measuredangle$ BGD = CGA (B I) BDG = CAG, da beide rechte Winkel sind, also auch (B 4) $\measuredangle$ GBD = ACG sein muss. Es ist aber $\frac{BF}{BD} = \cos FBD$ $= \cos\alpha$ (C I) $\frac{BD}{BC} = \sin\beta$, $\frac{ED}{CD} = \sin\alpha$, $\frac{CD}{BC} = \cos\beta$. Wir erhalten also ganz denselben Ausdruck wie oben.

Ebenso ist $\cos(\alpha+\beta) = \frac{CA}{CB} = \frac{CE-AE}{CB} = \frac{CE}{CB} - \frac{AE}{CB}$

$$= \frac{CE}{CB} - \frac{FD}{CB} = \frac{CE \cdot CD^{*}}{CB \cdot CD} - \frac{FD \cdot BD^{*}}{CB \cdot BD} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{CB} - \frac{FD}{BD} \cdot \frac{BD}{CB}$$

Es ist aber wieder (C I) $\frac{CE}{CD} = \cos\alpha$, $\frac{CD}{CB} = \cos\beta$, $\frac{FD}{BD}$ $= \sin GBD = \sin\alpha$, $\frac{BD}{CB} = \sin\beta$; wir erhalten also ebenfalls denselben Ausdruck wie oben.

V. Setzt man in IV a) und b) $\alpha = \beta$, so erhält man daraus durch einfache arithmetische Operationen die Formeln

a) $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

b) $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ da $\frac{\sin}{\cos} = \text{tg}$ (C I)

c) $\text{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

*) Da jeder Bruch unbeschadet seines Werthes in Zähler und Nenner mit ein und demselben Factor multiplicirt oder dividirt werden kann.

Reguläres System.

§. 15. Syn. sphäroëdrisches (Weiss) isometrisches (Naumann) tessulares (Mohs) etc. Es beruht, wie wir § 6 schon angaben, auf 3 untereinander rechtwinkligen, vollkommen gleichen Dimensionen. Die Masse verhält sich vollkommen gleich nach diesen 3 Richtungen; alle Erscheinungen, die an einem Ende der einen sich zeigen, können wir an allen übrigen in gleicher Weise wahrnehmen, also werden sich auch alle Flächen des einen Endes in gleicher Weise an allen übrigen vorfinden. *) Bei der Beschreibung und Betrachtung eines Krystalles aus diesem System, die man wie bei allen übrigen auch stets in einer solchen Stellung desselben vornimmt, dass eine Achse senkrecht steht, ist es ganz einerlei, welche man in diese Stellung bringt, was bei den übrigen Krystallsystemen, wo die Achsen nicht mehr alle gleich sind, nicht mehr der Fall ist. Wegen der Gleichheit der 3 Achsen und ihrer Hälften bezeichnet man letztere alle mit dem gleichen Buchstaben, mit a und giebt zur Bezeichnung einer Fläche an, in welchem Verhältnisse sie diese 3 verschiedenen a schneidet. Nach §. 7 ist damit zugleich der einfache Körper bezeichnet, welchen diese Flächen bilden, und bei dem hemiedrischen Verhalten giebt man das Fehlen der Hälfte dadurch zu erkennen, dass man vor das Zeichen der Fläche die Zahl 2 setzt, wodurch dann ebenfalls der ganze einfache hemiedrische Körper bezeichnet ist.

§. 16. Je 2 der 3 untereinander rechtwinkligen Achsen liegen immer in einer Ebene; denken wir uns nun einen der 3 rechtwinkligen Parameter aa′ Fig. I senkrecht, so liegen die beiden andern a·· a··′ und a·a·′ in einer horizontalen Ebene. Legen wir durch je 2 in einer Ebene liegende Parameter eine Fläche, durch aa·· a′a··′, aa·a′a·′ und a·· a·a··′ a·′, so wird dadurch der ganze Raum um den Mittelpunct — den Durch-

*) Die hemiedrischen Erscheinungen als Ausnahme hievon werden später noch näher erörtert.

schnittspunct der 3 Parameter und der 3 durch dieselben gelegten Ebenen — in 8 gleiche Theile, in 4 obere und 4 untere getheilt. Ebenso wird die ganze Masse eines Krystalles aus diesem Systeme durch dieselben Ebenen in 8 vollkommen gleiche Theile zerfällt. Wie sich die Masse in einem verhält, verhält sie sich auch in allen übrigen, so dass wir alles, was wir in einem solchen Raumoctanten antreffen in allen übrigen ebenso voraussetzen dürfen. Jede Krystallfläche wird einen bestimmten Theil dieses Raumes um den Mittelpunct abschneiden, und so mit allen übrigen gleichen in den verschiedenen Raumoctanten einen bestimmten Körper vollkommen begränzen. Welches ist nun die einfachste Weise der Begränzung eines Körpers aus diesem Systeme? Offenbar diejenige, wo wir durch jeden Raumoctanten nur eine Fläche legen und zwar in einer solchen Lage, dass sie alle 3 zu demselben gehörende Parameter und zwar in gleichen Entfernungen vom Mittelpuncte schneidet. Denken wir uns nun sämmtliche gleichweit vom Mittelpunct entfernt liegende Puncte der Achsen durch gerade Linien verbunden, so werden diese sämmtlich gleich lang sein und in jedem Raumoctanten ein gleichseitiges Dreieck, als Begränzungsfläche des Körpers, bilden müssen. Der so begränzte Körper ist also ein von 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossener. Ebenso einfach ergeben sich seine übrigen Eigenschaften aus unseren Voraussetzungen: dass je 4 in einer Ebene liegende Kanten desselben unter rechten Winkeln zusammenstossen, also ein Quadrat bilden, und dass, da wir 3 solche Ebenen haben, der Körper 12 Kanten haben muss. Da ferner an jedem Parameter je 4 Raumoctanten zusammenstossen, so müssen die Flächen von diesen 4 alle in einem Puncte desselben zusammentreffen. Unser Körper wird also 4flächige regelmässige Ecken haben und da wir an jedem Parameter 2 solche Puncte — an jedem Ende desselben einen — haben, müssen 6 solche Ecken vorhanden sein.

Dieser einfache, von 8 gleichen Flächen, 12 gleichen Kanten und 6 gleichen und regelmässigen Ecken begränzte Körper heisst nach der Zahl seiner Flächen und dem Systeme, zu welchem er gehört, das reguläre Octaëder. Seine Fläche und nach §. 7 somit der ganze Körper erhält das Zeichen [a : a : a], da ja jede die 3 Achsen in gleicher Entfernung a vom Mittelpuncte schneidet.

§. 17. Welche verschiedenen Flächen lassen sich (ausser der erwähnten) überhaupt in einem auf 3 rechtwinkligen Parametern beruhenden Systeme denken? Gehen wir davon aus, in welchen verschiedenen Verhältnissen Flächen zu denselben stehen können, und suchen wir darnach die Flächen und damit die einfachen Körper selbst zu bezeichnen, so finden wir, dass nur folgende 7 Fälle möglich sind:

A) eine Fläche schneidet einen Parameter, die beiden andern nicht,

1) es ist nur ein solcher Körper möglich, sein Zeichen wird sein [a : ∞ a : ∞ a]

B) eine Fläche schneidet 2 Parameter und geht dem 3ten parallel, und zwar

2) alle 2 in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct, ihr Zeichen daher [a : a : ∞ a]

3) in ungleichen Entfernungen. Nennen wir die eine a, so wird die andere ma, wo m jeden beliebigen Werth zwischen o und ∞ haben kann, die Fläche also [a : ma : ∞ a]

C) eine Fläche schneidet alle 3 Parameter und zwar

4) alle 3 in gleichen Längen, unser Octaëder [a : a : a] oder 2 gleich lang, die 3te verschieden, dabei sind entweder

5) die 2 gleich langen kürzer als die 3te, das Verhältniss also der Fläche [a : a : na], wo n alle Werthe zwischen 1 — ∞ haben kann, oder

6) die 2 gleich langen sind länger als die 3te, das Verhältniss der Fläche also [a : ma : ma]

7) alle 3 in verschiedenen Entfernungen, das Verhältniss der Fläche wird also sein [a : ma : na]

Welche einfachen Körper entsprechen nun diesen allein möglichen Fällen?

Den einen derselben, den 4ten, haben wir bereits betrachtet. Nehmen wir ihn als den einfachsten als Ausgangspunct, wählen wir das Octaëder (Taf. I, Fig. 1) zur Grundgestalt des ganzen Systems, so lassen sich daraus die übrigen Körper auf folgende Weise ableiten:

1) Denken wir uns durch jede Achse in der Entfernung a vom Mittelpunct, also durch jedes Octaëdereck eine Fläche gelegt, die den beiden andern parallel läuft, so resultirt daraus ein von 6 Quadraten begränzter Körper, der Würfel oder Hexaëder (Fig. 8). Er hat 6 Flächen, 12 gleiche Kanten, 8 reguläre, 3kantige Ecken. Seine Flächen erscheinen am Octaëder als gerade Abstumpfung der Ecken (Taf. I, Fig. 5, 6), umgekehrt die Octaëderflächen am Würfel als gerade Abstumpfung der Würfelecken (Fig. 7 und 6). Es ist nur ein Körper mit diesem Parameterverhältnisse möglich. Sein Zeichen [a : ∞ a : ∞ a]

2) Denken wir uns eine Fläche von a nach a gehend und parallel dem dritten, so wird dieselbe laufen wie die Octaëderkante, und am Octaëder als gerade Abstumpfung seiner Kante (Fig. 2 und 3) also 12mal erscheinen. Der von diesen zwölf Flächen begränzte Körper (Fig. 4) heisst nach der Form seiner Flächen Rhombendodecaëder und nach dem Granat, der am gewöhnlichsten diese Gestalt zeigt, Granatoëder; er

hat 24 gleiche Kanten, 6 4kantige und 8 3kantige reguläre Ecken. Die Octaëderfläche erscheint an ihm als gerade Abstumpfung der 3kantigen Ecken (Fig. 3), die Würfelfläche als gerade Abstumpfung der 4kantigen Ecken (Fig. 10) an dem Würfel die Granatoëderfläche als gerade Abstumpfung der Kante (Fig. 9). Es giebt nur eine Art von diesem Körper; sein Zeichen | a : a : ∞ a |

3) Denken wir uns jedes Octaëdereck 4flächig zugespitzt und die Zuspitzungsflächen gerade auf die Kanten aufgesetzt (Taf. II, Fig. 21), so wird jede solche Fläche durch 1a gelegt, das 2te in einer Entfernung ma > 1a schneiden und dem dritten parallel gehen; da am Octaëder 6 4kantige Ecken sind, so wird diese Fläche 24mal erscheinen. Ein von 24 solchen Flächen begränzter Körper (Taf. II, Fig. 18) hat den Namen Pyramidenwürfel oder Tetrakishexaëder erhalten. Die Octaëderfläche erscheint an ihm als gerade Abstumpfung seiner 8 symmetrischen Ecken. Er ist von 24 gleichschenkligen Dreiecken eingeschlossen, hat 24 und 12 gleiche Kanten, 6 reguläre 4kantige und 8 symmetrische 3 und 3kantige Ecken. Da m alle möglichen Werthe von 1 — ∞ haben kann, so ist auch eine grosse Mannichfaltigkeit von solchen Körpern möglich. Ihr Zeichen ist | a : ma : ∞ a |

4) Das schon beschriebene Octaëder | a : a : a |

5) Denken wir uns eine Fläche durch 1a und 1a gelegt, so dass sie den dritten zu demselben Raumoctanten gehörigen Parameter in einer Entfernung na > 1 schneidet, so werden uns am Octaëder je 2 solcher Flächen als Zuschärfungsflächen der Kanten (Fig. 12) erscheinen und zwar auch 24mal. Ein solcher 24flächiger Körper (Fig. 11) heisst Pyramidenoctaëder oder Triakisoctaëder. Er hat zur Begränzung 24 gleichschenklige Dreiecke, 12 und 24

Kanten; 6 symmetrische 4 und 4kantige Ecken und 8 3kantige reguläre Ecken. Die Octaëderfläche erscheint an ihm als gerade Abstumpfung der 3kantigen Ecke. Da n alle Werthe zwischen 1 und ∞ haben kann, ist ebenfalls eine grosse Zahl solcher verschiedener Körper möglich, welche alle das Zeichen | a : a : na | haben.

6) Legen wir eine Fläche durch 1 a so, dass sie die beiden andern in gleicher Entfernung ma > 1 a schneidet, so werden je 4 solche, an einem Octaëdereck zusammenstossend, als eine Zuspitzung des Eckes erscheinen, wobei die Zuspitzungsflächen gerade aufgesetzt auf die Flächen des Octaëders sich zeigen (Fig. 13 und 14). An jedem Eck werden sich 4, also im Ganzen ebenfalls 24 solche Flächen zu einem Körper vereinigen, der den Namen Leucitoid nach dem Mineral, das in seiner Form am häufigsten krystallisirt, oder Icositetraëder erhalten hat (Fig. 15). Seine Flächen sind symmetrische Trapezoide sg. Deltoide, seine Kanten 2erlei, 24 und 24 gleiche, seine Ecken von 3erlei Art, 6 regelmässige 4kantige, 8 regelmässige 3kantige und 12 symmetrische 2 und 2kantige. Die Octaëderfläche erscheint an ihm als Abstumpfung der 3kantigen (Fig. 14), die Würfelfläche als die der 4kantigen Ecke. Da m alle Werthe zwischen 1 und ∞ haben kann, ist eine grosse Anzahl von solchen Körpern mit dem Zeichen | a : ma : ma | möglich.

7) Legen wir eine Fläche so durch 1 a, dass sie die beiden andern in ungleichen Entfernungen ma und na > 1 a schneidet, so werden wir an jedem Octaëdereck 8 solche Flächen als Zuspitzungsflächen des Eckes (Taf. II, Fig. 22) erscheinen sehen, und wenn diese Flächen den Raum allein begränzen, Körper von 6 × 8 Flächen erhalten, die darnach den Namen Hexakisoctaëder oder auch zum Theil Pyramidengranatoëder führen. Ein solcher Körper (Fig. 23) ist begränzt von 48 ungleichseitigen Dreiecken, 3erlei Kanten,

die alle 3 zu 24 erscheinen, und von 6 symmetrischen 4 und 4kantigen, 8 symmetrischen 3 und 3kantigen und 12 symmetrischen 2 und 2kantigen Ecken. Die Octaëderflächen erscheinen an ihm als Abstumpfungsflächen der 3 und 3kantigen Ecken. Da m und n alle möglichen Werthe zwischen 1 und ∞ haben können, so ist ebenfalls eine grosse Anzahl von Körpern mit dem Zeichen [a : ma : na] möglich.

§. 18. Es lässt sich auch noch auf eine andere Weise zeigen, dass keine anderen Körper als die 7 oben bezeichneten möglich sind, die uns zugleich erkennen lässt, warum sie die bestimmte Zahl von Flächen, die jedem zukommt, haben müssen. In welcher Form, mit welchem Theile nehmlich auch eine Fläche eines derselben erscheint, immer wird der Theil von ihr dabei erscheinen, der dem Mittelpuncte näher liegt, als die übrigen Puncte derselben Fläche. Ein Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf jede Fläche wird immer den ihm am nächsten gelegenen Punct der Fläche treffen und auf jeder aus dem Mittelpunct gezogenen Linie, wird irgend eine *Fläche* senkrecht stehen können. Soviel als nun solche der Lage nach verschiedene Arten von Perpendikeln möglich sind, wird es verschiedene Arten von Flächen und Körpern geben. Wir wollen zu dieser Untersuchung nur einen Raumoctanten betrachten (Fig. II a, a,· a··), da ja, was für einen, im regulären System auch für alle übrigen gilt.

1) Denken wir uns eine Linie aus dem Mittelpuncte so gezogen, dass sie stets von gleichen Puncten der 3 Achsen sich gleich weit entfernt hält Ct Fig. II, so ist in jedem Octanten nur eine solche Linie möglich; eine Fläche senkrecht auf ihr, wird alle 3 Parameter in gleichen Entfernungen schneiden, also unsere Octaëderfläche [a : a : a] bilden. Alle übrigen aus dem Mittelpuncte gezogenen Linien innerhalb eines Octanten werden um diese ersterwähnte Linie herum

zu liegen kommen, und werden gehörig verlängert die Octaëderfläche in irgend einem beliebigen Puncte treffen; es werden daher so viele Arten solcher Linien und darauf senkrechter Flächen möglich sein, als wir in dem Dreieck des Octaëders verschiedene Arten von gleichliegenden Puncten haben.

2) Wie die Octaëderdimension — wie wir die auf ihr senkrechte Linie vom Mittelpuncte aus nennen wollen — gleiche Lage hatte zwischen je 3 Achsen, so wird eine zwischen je 2, also senkrecht auf der Mitte der Octaëderkante, die ja von 1a nach 1a läuft, anzunehmen sein. Eine Fläche senkrecht auf dieser cs Fig. II wird 12mal vorkommen, da wir 12mal eine solche Dimension zwischen je 2 Achsen ziehen können. Es ist dieses unsere Granatoëderfläche [a : a : ∞ a]. Die auf ihr senkrechte Linie wollen wir die mittlere Octaëderdimension nennen.

3) Legen wir 3 Ebenen durch den Mittelpunct, je ein a, eine kürzeste und eine mittlere Octaëderdimension, so müssen diese die Octaëderfläche in der Richtung ihrer Diagonale schneiden. Denken wir uns nun innerhalb dieser Ebenen Linien vom Mittelpuncte gezogen zwischen je einer Grunddimension a und der kürzesten t, so lassen sich eine grosse Menge derselben zwischen diesen beiden annehmen, und zwar in jedem Octanten jedesmal 3 gleichgelegene zwischen t und a, zwischen t und ȧ und zwischen t und ä, wie z. B. die Linien Cl (Fig. II), darauf senkrecht gelegte Flächen werden 24mal vorhanden sein und durch 1 a gelegt die beiden andern in gleichen Entfernungen ma > 1 a schneiden. Es sind also die Flächen eines Leucitoides.

4) In dem Theil derselben Ebene, der zwischen der kleinsten und mittleren Octaëderdimension und dem Mittelpunct liegt, werden ebenfalls eine grosse Anzahl von Linien aus dem Mittelpuncte möglich sein, welche die Octaëder-

fläche innerhalb des kürzeren Theils der Diagonale treffen und daher auf gleiche Weise in jeder Diagonale sich finden müssen (Co Fig. II). Darauf senkrechte Flächen werden daher ebenfalls 24mal vorkommen. Sie werden ebenfalls 2 a in gleichen Theilen schneiden, das 3te aber grösser als diese, daher das Zeichen [a : a : na] haben, also unseren Pyramidenoctaëderflächen entsprechen.

5) Legen wir Ebenen durch je 2 Grunddimensionen a, die mittlere Octaëderdimension und den Mittelpunct, so werden wir innerhalb derselben zwischen je einer mittleren und einer Grunddimension ebenfalls eine grosse Zahl von Linien aus dem Mittelpuncte ziehen können, wie Cw (Fig. II), welche die Octaëderkante schneiden werden und von denen in jeder Kante je 2 gleich gelegene also 24 zu finden sind. Darauf senkrechte Flächen werden durch ein a gelegt, das andere, in derselben Ebene wie die erwähnte senkrechte Linie der Fläche liegende a, in einer Entfernung m > 1 schneiden, das 3te aber nicht, da ja die erwähnte durch 2 Grunddimensionen gehende Ebene senkrecht auf dem 3ten steht, also eine auf dieser senkrechte Fläche parallel diesem a gehen muss. Diese Flächen entsprechen also unsern Pyramidenwürfelflächen [a : ma : ∞ a]

6) Ausserhalb der Kanten und Diagonalen des Octaëders sind in jedem der 6 durch dieselben eingeschlossenen gleichen Dreiecke der Octaëderfläche je 6 gleich gelegene Puncte möglich, von denen Linien nach dem Mittelpuncte gezogen zwischen je eine Grund-, eine mittlere und eine kürzeste Octaëderdimension fallen. Es ist ebenfalls eine grosse Zahl solcher gleicher Linien wie Ch (Fig. II) möglich und darauf senkrechte Flächen werden ein Hexakisoctaëder bilden, durch 1 a gelegt werden sie von den andern ma > 1 und na > ma abschneiden.

7) Eine Linie aus dem Mittelpuncte, die mit der Grunddimension selbst zusammenfällt, ist natürlich so oft möglich als diese selbst vorhanden sind, nehmlich 6mal. Darauf senkrechte Flächen gehen den beiden andern parallel, es sind dies unsere Würfelflächen | a : ∞a : ∞a |

Andere Lagen sind nicht denkbar, also auch keine anderen Flächen und Körper, als die erwähnten 7 Arten, zu deren näherer Betrachtung wir hiemit übergehen, und deren Schema sich ihrer Lage, d. h. der Lage der auf ihren senkrechten Dimensionen nach, wie diese die Octaëderfläche treffen, gestaltet wie es Fig. LIII angiebt.

§. 19. **Das Octaëder** (Taf. I, Fig. I) | a : a : a | oder O nach **Naumann** und **Mohs**.

Es ist, wie wir wissen, von 8 gleichseitigen Dreiecken, 12 gleichen Kanten und 6 regelmässigen 4kantigen Ecken begränzt.

Nehmen wir die Grunddimension 1 a als 1 an, so erhalten wir für seine mittlere und kleinste Dimension folgende Werthe:

1) Für die mittlere: $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

In dem rechtwinkligen Dreiecke (Fig. VI) seien Ca und Ca' die beiden Grunddimensionen, 1 Cs'' = s, so ist nach B 10 also $Cs'' = \frac{Ca \cdot Ca}{a'a} = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = s$.

2) Für die kleinste: $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Es sei Fig. IV Ca unsere Grunddimension = 1, Cs unser $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, as = der Diagonale der Octaëderfläche von 1 a nach $s = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, so ist nach demselben Lehrsatze wie oben, $t = Co = \frac{Ca \cdot sC}{sa} = \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, also ist $a : s : t = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{3}}$.

3) Neigungswinkel der Fläche gegen die Achse a. ffenbar (Fig. IX) geben uns hier die Linien sC : Ca das Verhältniss sin : cos für den gesuchten $\measuredangle\ \alpha$. Es ist also der Winkel, wo sin : cos* $= V\frac{1}{2} : 1 = 35^0, 15', 52''$ oder für den Winkel 2er Flächen in der Ecke an a gegeneinander 70^0 ', 44''.

4) Neigung zweier Flächen in der Kante gegen einander.

Es ist, wie aus Fig. IX ersichtlich, der $\frac{1}{2}$ Kantenwinkel β derjenige, wo wir das umgekehrte Verhältniss von sin : cos haben, wie beim vorigen, also das Complement des vorigen zu 180^0. sin : cos = a : s = $1 : V\frac{1}{2}$, der $\frac{1}{2}$ $\measuredangle$ ist, demnach $54^0, 44' \; 8''$, der ganze $109^0, 28', 16''$.

5) Neigung der Kante gegen die Achse.

Das Verhältniss von sin : cos ist hier = a : a, also der Winkel 45^0 und der 2er Kanten in der Ecke gegen einander 90^0.

§. 20. Granatoëder (Fig. 4. G und g Taf. I und II) a : a : ∞ a nach Weiss, ∞ O nach Naumann, einkantiges Tetragonaldodecaëder D. (Mohs), Rautenzwölfflach (v. Raumer).

Es ist von 12 Rhomben begränzt und hat 24 gleiche Kanten, 6 reguläre 4kantige und 8 reguläre 3kantige Ecken. Denken wir uns seine Flächen durch 1 a senkrecht auf C (Fig. XIII) gelegt, so werden die 2 nach a und a' gehenden

*) Hier, wie in der Folge, werden wir stets das Verhältniss von Sinus : Cosinus zur Bestimmung der verschiedenen Winkel angeben, weil für dasselbe die Linien sehr einfach zu construiren sind, und unmittelbar in die Augen fallen. Wenn wir daher von einer Linie sagen, sie gebe uns den Sinus, so ist damit nur gemeint, dass sie uns das Verhältniss desselben zu einer andern, welche dann das Verhältniss des Cosinus darstellt, nicht den wirklichen Werth des Sinus, der diese Linie, dividirt durch die beide rechtwinkligen Linien als Hypotenusa - radius - verbindende Linie wäre.

Flächen, die ihr 2tes a ebenfalls in der Einheit schneiden und dem dritten parallel gehen, auf der durch die beiden andern a, unser Ca und Ca' Fig. XIII, gelegten Ebene in der Richtung der Linien gag' und ga' verlaufen, wenn die Octaëderflächen in der Richtung der Linien aa' und aa· die Fläche schneiden, oder Taf. I wie die Linien G und O. Mit andern Worten: unter der obigen Voraussetzung sind die Linien G (Taf. I) die Projection der Granatoëderflächen auf der durch die beiden andern a gelegten Ebene, in der a, a unsere Grunddimensionen, s und s die mittlere zwischen denselben bezeichnet. Die Kante, welche die 2 Flächen miteinander bilden, läuft dann von dem auf C senkrechten a nach g' (Fig. XIII). Da aber der Voraussetzung nach g'a· parallel Ca, g'a parallel a·C, so ist a·g'aC ein Quadrat, und da sich in einem Quadrate die Diagonalen halbiren, Cs = sg', also Cg' = 2 Cs = 2 s. Wir werden auch für alle übrigen Körper dasselbe Verfahren zur leichteren Berechnung ihrer Verhältnisse anwenden, alle an a zusammenstossenden Flächen durch 1 a, das senkrecht auf unserer Projectionsebene ist, gelegt denken und dann die Linie angeben, in welcher sie dieselbe schneiden (Taf. I). Ausserdem sind noch in Taf. II die Durchschnitte angegeben, welche die verschiedenen Körper mit einer durch a, den Mittelpunct, unser s und t gelegten Ebene (Fig. 2) und mit einer durch ein a, s und ein 2tes a gelegten andern Ebene machen. Fig. 1 stellt also den Durchschnitt in der Richtung durch je 4 Kanten Fig. 2 durch je 4 Diagonalen des Octaëders dar.

Für das Granatoëder ergeben sich dann folgende Verhältnisse:

1) Werth seiner 3 verschiedenen Dimensionen $a : s' : t' = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Da nehmlich die Fläche des Granatoëders von 1 a nach 1 a, wie die Kante des Octaëders verläuft, so bleibt der Werth für die Dimension s derselbe, wie beim Octaëder $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es sei Fig. IV Cg' = Cg' von Fig. XIII = 2 s, as die Diagonale des Octaëders, senkrecht darauf Ch = unserer Dimension t, die in g von der Kante des Granatoëders ag' geschnitten wird. Ziehen wir nun ah parallel Cg', g'h parallel Ca, so werden (nach B 1 und 2) die Winkel in den Dreiecken soC und aoh gleich und nach B 6 △ soC ∾ aoh, also (nach B 7) so : oa = sC : ah, so : oa ist aber = st : ta (Fig. II) = 1 : 2, also ah = 2 sC = 2s = Cg', d. h. Cg'ha wird ein Rechteck, in dem die Diagonalen von gleicher Länge sind und sich halbiren; es ist also Cg = ag = ½ ag'; ag' $= \sqrt{(Ca)^2 + (g'C)^2}$ $= \sqrt{a^2 + 4s^2} = \sqrt{3}$; folglich Cg $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

2) Der Neigungswinkel der Fläche gegen die Achse ist = dem der Neigung der Octaëderkante gegen die Achse, also sin : cos = a : a. Je 2 Flächen bilden also an der Achse einen rechten Winkel mit einander.

3) Für den Neigungswinkel der Kanten gegen die Achse ist sin : cos = g'C : Ca (Fig. IV) = 2 s : a = $\sqrt{2}$: 1.

4) Neigungswinkel 2er Flächen in der Kante gegen einander.

Halbiren wir diesen Winkel in der Kante ag' (Fig. V) mittelst eines durch die Kante und die Dimension s und t gehenden Schnittes, so liegt die Linie, welche uns das Verhältniss des Cosinus dieses ½ ∢ angiebt, in der Ebene dieses Schnittes, wenn der Sinus dazu dann die in einer darauf senkrechten, also in unserer Projectionsebene liegende Linie a's ist. Wählen wir nun als Verhältniss der Sinuslinie die Linie a's, so ist der Cosinus hiezu das Perpendikel aus dem Puncte, wo unsere Linie a's die den Winkel halbirende Ebene trifft, auf die Granatoëderkante, deren Lauf von 1 a nach 2 s geht, also das Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreieck, wo ½ a und s die Katheten sind, aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse, während der radius von a' nach

dem Puncte der Kante geht, wo sie von unserer Sinuslinie getroffen wird. Fig. V sei also ag' die (verlängerte) Granatoëderkante, Cs = sg' = s = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, g'C = 2 s, gs senkrecht auf Csg = $\frac{1}{2}$ aC = $\frac{1}{2}$ a (denn es ist sg : Ca = g's : g'C = s : 2 s, also sg = $\frac{1}{2}$ aC = $\frac{1}{2}$ a), so ist (B 10)

$$rs = \frac{gs \cdot g's}{gg'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

a's = sC = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, also sin : cos = $\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{1} : \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} : 1$. Es entspricht dieses Verhältniss dem Winkel von 60°. Der ganze Winkel beträgt also 120°. Daraus geht hervor, dass das Granatoëder in einer solchen Stellung, dass die Dimension t als senkrecht angenommen wird, eine reguläre 6seitige Säule mit 3flächiger Zuspitzung darstellt.

5) Ebene Winkel des Granatoëders.

Die lange Diagonale des Rhombus ist = der Octaëderkante, da sie mit derselben zusammenfällt, also = $\sqrt{2}$. Denken wir uns einen Durchschnitt des Granatoëders durch ein s, t und a, so wird ein solcher Durchschnitt 2 der senkrechten Achse parallelen Rhombenflächen in der Richtung der kurzen Diagonalen schneiden, die übrigen an demselben a und a' zusammenstossenden längs der Kante, die von a nach 2 s d. h. nach g geht. gs Fig. IV und V ist daher die $\frac{1}{2}$ kleine Diagonale, die ganze also, da gs = $\frac{1}{2}$ ist, = 1. Es verhalten sich also die ganzen, also auch die halben Diagonalen des Rhombus wie 1 : $\sqrt{2}$. Der stumpfe $\frac{1}{2}$ ∢ des Rhombus hat daher sin : cos = $\sqrt{2}$: 1. Der halbe spitze ∢ des Rhombus sin : cos = 1 : $\sqrt{2}$. Es ist dieses derselbe Winkel, unter dem die Flächen des Octaëders in einer Kante zusammenstossen, da wir für seine Hälfte das Verhältniss von sin : cos = $\sqrt{\frac{1}{2}}$: 1 hatten, $\sqrt{\frac{1}{2}}$: 1 aber gleich ist 1 : $\sqrt{2}$. Der Rhombus des Granatoëders ist also gleich dem Rhombus des Octaëders, der entsteht, wenn man einen Schnitt durch den Mittelpunct einer Kante, durch s, t und a, also durch die Diagonale der

Flächen (Taf. II, Fig. 1. O) gelegt denkt. Aus dem Verhältnisse der beiden Diagonalen finden wir aber ebenfalls leicht

6) Die Kante des Granatoëders = $\sqrt{\frac{3}{4}}$, denn die Kante m ist = der Wurzel der Summa der Quadrate der beiden halben Diagonalen = $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, wie wir es bereits oben auf andere Weise bei Berechnung der Dimension t gefunden hatten.

§. 21. Würfel [a : ∞ a : ∞ a] (Taf. I, Fig. 8) (H. u. h. Taf. I und II). Hexaëder. ∞ O ∞. (Naumann).

Er hat 6 Flächen, die Quadrate sind, 12 gleiche Kanten und 8 regelmässige 3kantige Ecken.

1) Das Verhältniss der 3 Dimensionen ist bei ihm a : s′ : t′ = 1 : $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$.

Die Endpuncte der Hauptachsen müssen bei dem Würfel in die Mittelpuncte seiner Flächen fallen, da nur je eine Fläche durch 1 a bei ihm gelegt wird, die parallel den beiden andern sich ausdehnend, so weit Begränzung des Körpers sein wird, als sie dem Mittelpuncte näher liegt, als die auf den übrigen a senkrechten und dem a dieser Fläche parallelen Flächen; wo sie mit diesen gleiche Entfernung hat, wird sie von diesen geschnitten und bildet mit ihnen Kanten und Ecken. Von den 6 durch die 6 Endpuncte der 3 rechtwinkligen Dimensionen senkrecht auf je einer, parallel den andern beiden gelegten Flächen geht immer eine einer andern parallel, nehmlich der, welche am entgegengesetzten Ende ihres a liegt, indem diese ja denselben beiden andern a parallel läuft. Die übrigen 4, welche parallel dem a laufen, auf welchem die beiden übrigen einander parallelen Flächen senkrecht stehen, schneiden sie alle und zwar alle in gleichen Entfernungen von ihrem Endpuncte in a, da die Endpuncte der Achsen, durch welche die 4 sie schneidenden Flächen gelegt sind, alle gleichweit vom Mittelpunct und alle gleichweit von jedem beliebigen Puncte des aus demselben auf den beiden

andern errichteten Perpendikels, hier unserem a, entfernt sind. Es müssen, also auch die Flächen Quadrate werden, weil sie sämmtlich unter rechten Winkeln sich schneiden, da ja die Linien, welchen sie parallel laufen und die, auf denen sie senkrecht stehen, sich unter rechten Winkeln schneiden. Fallen die Endpuncte der Achsen in die Mittelpuncte der Flächen, so laufen die mittleren zwischen je 2 Dimensionen a, unsere s', in die Mitte der Kanten, die mittleren zwischen je 3, t', in die Endpuncte der 8 Ecken.

Nehmen wir a wieder $= 1$, so ist also Taf. II, wo Fig. 2 h, h' den Durchschnitt des Würfels durch die 4 a zeigt, und Fig. XIII, wo a·g' ga' die Hälfte desselben darstellt, $g'C =$ unserm s', $= \sqrt{(Ca\cdot)^2 + (aC)^2}$, da aber $Ca\cdot = aC = a = 1$, so ist $g'C = \sqrt{2}$. t' beim Würfel ist (Taf. II, Fig. 2) $=$ Ch d. h. $=$ der Hypotenusa im rechtwinkligen Dreieck, wo a die eine, Cv $=$ unserer mittleren Dimension s des Würfels die andere Kathete ist, also $= \sqrt{4 s^2 + 1} = \sqrt{3}$. a : s' : t', also $= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, wie oben.

Die Winkel sowohl der Flächen, als der Kanten sind, wie erwähnt, rechte, die $\frac{1}{2}$ Kante $=$ unserem a $= 1$, die ganze also $= 2$.

§. 22. Die Leucitoide (L u. ∠ Taf. I u. II) [a : ma : ma] oder [a : a : $\frac{1}{m}$a] nach Weiss, Icositetraëder (mOm) Naumann, zweikantige Tetragonalicositetraëder (Mohs).

Sie haben 24 Flächen, 24 und 24 gleiche Kanten, 6 reguläre 4kantige, 8 reguläre 3kantige und 12 symmetrische 2 und 2kantige Ecken. Da m alle möglichen Werthe zwischen 1 und ∞ haben kann, lässt sich für die verschiedenen möglichen Fälle nur eine von m abhängige allgemeine Formel zur Berechnung seiner verschiedenen Elemente geben. Zur Ausmittelung derselben, namentlich zu der des Verhältnisses der 2 Dimensionen s und t brauchen wir sowohl für diesen Körper,

wie für die übrigen noch folgenden Lehrsatz, der uns ein Mittel an die Hand giebt, wie eine aus einem Ecke eines Dreieckes auf die gegenüberliegende Seite gehende Linie die übrigen, ebenfalls aus den Ecken auf gegenüberliegende Seiten gehenden Linien sowohl, als die Seite selbst theilt, wenn uns 2 solche Verhältnisse gegeben sind. Dieser von Weiss *) zuerst allgemein entwickelte Lehrsatz ist folgender:

In jedem beliebigen Dreiecke ziehe man an beliebige Puncte der Seiten aus den 3 Ecken Linien, wie in Fig. III; bezeichnen wir nun die Stücke der Seiten sowohl wie der inneren Linien mit Buchstaben, so ist allgemein für das Verhältniss der Theilung der inneren Linien und der Seiten:

$$N : M = x\,(a + b) : ya$$
$$x : y = Na : M\,(a + b).$$

Ziehen wir nehmlich die Linie CF parallel mit vw von der Spitze des Dreiecks C bis zur Verlängerung von ab, so sind (B 8) in dem $\triangle$ CEF die Seiten CE, EF getheilt im Verhältnisse $z : a = N : M$ und in dem $\triangle$ CAF durch dieselbe Linie die Seiten CA, AF im Verhältnisse BF : BA = CD : DA d. h. $z : a + b = x : y$; daraus erhalten wir für z die Werthe I. $z = \frac{aN}{M}$ II. $z = \frac{x\,(a + b)}{y}$ und aus $\frac{aN}{M} = \frac{x\,(a + b)}{y}$, finden wir $\frac{N}{M} = \frac{x\,(a + b)}{ya}$ und daraus (A 1) $N : M = x\,(a + b) : ya$ oder $y : x = M\,(a + b) : Na$.

Ganz auf dieselbe Weise lassen sich ähnliche Proportionen für alle übrigen inneren Linien und Seiten auffinden und beweisen. Es lässt sich aus denselben immer das Verhältniss der Theile der übrigen Linien berechnen, so wie uns von 2 Linien das Verhältniss ihrer Theile zu einander bekannt sind; aus den bekannten $a : b$, $x : y$ lässt sich das

*) Weiss Abhandl. d. Berl. Ac. der Wiss. Jahrg. 1818 und 19 p. 277 und 1824, pag. 241, wo derselbe weiter verfolgt ist.

unbekannte N : M und aus a : b und N : M das unbekannte x : y u. s. w. berechnen.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes nun können wir die Werthe der verschiedenen Dimensionen s und t, die Werthe der Kanten u. s. w. der verschiedenen Körper berechnen.

Wir finden daraus für die Werthe der Dimensionen an den Leucitoiden das Verhältniss $a : s' : t' = 1 : \frac{2ms}{m+1} : \frac{3mt}{(m+2)}$.

1) Berechnung für s. Es sei (Fig. VI) $aC = a'C$ unser a, aa' die Octaëderkante, so ist der Lauf der Fläche eines Leucitoides von a nach ma' und von a' nach ma.

Welches Stück schneiden nun dieselben von Cs, unserer Dimension s, ab? Ziehen wir die Linie $ma'ma$, so entspricht offenbar $ma's$ unserm a in Fig. III, sma unserm b, Ca dem x, a ma dem y, während Cs' — unsere gesuchte Dimension s' — unserm N, $s's$ dem M entspricht.

Wir finden daraus, da $Ca = Ca' = 1$, $Cs' = s = as''$, $ma's = mas$, also $a = b$ $N : M = x\ (a + b) : ya = Ca\ (mas + sma') : maa . mas$ d. h. $Cs : ss' = 2a : (m-1)\, a = 2 : m-1$ also (A 5) $N = \frac{2}{m+1} N + M$; aber $Cs'' : Cs = a'C : ma'C = 1 : m$.

Da $Cs'' = s$, so ist Cs, unser $N + M = ms$, also $N = \frac{2ms}{m+1}$.

Die Dimension s ist also in jedem Leucitoid die $\frac{2m}{m+1}$ fache von der des Octaëders. In dem gewöhnlichsten Falle, dem Leucitoëder, bei welchem $m = 2$ ist unser s' also $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, bei dem andern häufiger vorkommenden ist $m = 3$, unser s' dann $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

2) Berechnung von t.

Es sei (Fig. VII) $aC = a = 1$, $Cs =$ der Octaëderdimension $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, msma parallel sa, $Cms = ms$, $Cma = m . a$

a; as, die Diagonale des Octaëders, $d = \sqrt{(aC)^2 + (sC)^2}$
$\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $st'' = \sqrt{(sC)^2 - (t''c)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$
$\frac{1}{6}$; d. Wir suchen das Verhältniss von Ct' : Ct als dem
N : M. Es entspricht dann in unserer Figur Ct' = N,
: M, mst = a = $\frac{1}{3}$ as . m, tma = b, Ca = x, ama = y,
ist nach unserer Formel N : M = x (a + b) : ya = Ct' : t't;
en wir die Werthe für a und b, so finden wir sie aus
nden Proportionen; nach B 7 ist

1) as : ma ms = Ca : Cma, i. e.
d : a + b = 1 : m, daraus
a + b = m . d

2) Cs : Cms = st'' : tms
s : ms = $\frac{1}{3}$d : a
m $\frac{1}{3}$ d = a

3) Ct'' : Ct = Ca : maC
$\sqrt{\frac{1}{3}}$: Ct = 1 : m
Ct = m$\sqrt{\frac{1}{3}}$

us finden wir, wenn wir die ebengefundenen Werthe
a, b und die für x und y einsetzen

$$N : M = 1 . md : (m - 1) . \tfrac{1}{3} md$$
$$= 1 : (m - 1) \tfrac{1}{3} = 3 : m - 1$$
$$\text{(nach A 5)}\ N = \frac{3}{m+2} \quad N + M = \frac{3mt}{m+2}$$

ist bei den Leucitoiden die Dimension t' stets die $\frac{3m}{m+2}$fach
sere, als die des Octaëders.

Ist m = 2, so ist sie $\frac{6}{4} . \sqrt{\frac{1}{3}}$, die $1\frac{1}{2}$ fach grössere von der
Octaëders = $\sqrt{\frac{9}{12}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, also gleich der des Granatoëders.
Leucitoid, welches als gerade Abstumpfung der Kanten
Granatoëders erscheint, muss, da die Kante des Granatoë-
von a nach s und zwar über die Dimension t läuft,
s t in derselben Grösse, wie die Kante des Granatoëders
eiden. Wir können daraus also berechnen, dass in diesem
itoid m = 2 sein muss.

Ist m = 3, so ist $t = \frac{9}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$, also die $1\frac{4}{5}$fach grössere von der des Octaëders = $\sqrt{\frac{27}{25}}$.

3) Neigungswinkel der Fläche gegen die Achse.

Nehmen wir die Fläche des Leucitoides wieder durch 1 a gelegt an, so wird sie von den beiden andern ma und ma, also von s ebenso ms abschneiden, da in Fig. VI Cs'' : Cs = Ca : ma, wenn also Cs'' gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und Ca = 1, so ist Cs = ms, also für die Flächenneigung der Leucitoide gegen a sin : cos = ms : 1. Sie hat die m mal stumpfere Neigung gegen die Achse, als die des Octaëders.

4) Neigungswinkel der Kanten gegen die Achse.

Die Kante A des Leucitoides (Fig. 15) (a ma' Fig. VI) läuft von a nach ma, also ist sin : cos = ma : a = m : 1 — die Kante B (ms'v Fig. VIII) läuft von $\frac{2\,m\,s}{m+1}$ nach ma, also wird sin : cos = $\frac{2\,ms}{m+1}$: ma = 2s : m + 1.

5) Neigungswinkel 2er Flächen in den Kanten gegen einander.

1) In den Kanten A, die von der Dimension a nach s' gehen.

Wir suchen zunächst wieder das Verhältniss für den halben Winkel. Die den Winkel halbirende Ebene geht durch a und ma, wählen wir nun als Cosinus das Perpendikel aus dem Mittelpunct unserer Construction auf die Kante, so ist der Sinus das auf unserem Cosinus und unserer den Winkel halbirenden Ebene senkrecht stehende a, welches von der Leucitoidfläche in der Entfernung m geschnitten wird, also ma. Wir haben also für den halben, sonach auch für den ganzen Winkel $\sin : \cos = ma : \frac{a \,.\, ma\,*}{\sqrt{a^2 + (ma)^2}} = m : \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{1+m^2} : 1$.

Ist m = 2, so ist sin : cos = $\sqrt{5}$: 1, ist m = 3, so ist sin : cos = $\sqrt{10}$: 1.

(*) Nach B 10).

2) In den Kanten, die von s' nach t gehen.

Auch hier wollen wir wieder das Verhältniss von sin : cos r den halben Winkel zunächst suchen. Die den Winkel ılbirende Ebene geht hier von s durch t nach a. Der Lauf r Kante ist offenbar von $\frac{2m}{m+1} \cdot s$ nach ma, von ms' nach ı Fig. VIII.

Am einfachsten wird das Verhältniss gefunden, wenn ir als Cosinus das Perpendikel aus dem Mittelpuncte unserer ›nstruction auf die Kante wählen. Der Sinus fällt dann in ıs auf unserer den Winkel halbirenden Ebene rechtwink-ge s. Er ist das Stück von diesem s, welches von unserer rlängerten Fläche abgeschnitten wird. Wir finden den Werth r dasselbe leicht auf folgende Weise. Es sei Fig. X Ca e Dimension a, Cs = s = Cs' = s'a = sa, sa parallel Cs' s die halbe Octaëderkante, die von a nach s läuft, Cm die-nige Dimension s, durch welche unsere den fraglichen antenwinkel halbirende Ebene geht, und zwar

n $= \frac{2m}{m+1}$ s, m der Punct also, von welchem unsere Kante ch dem auf unserem C senkrecht stehenden ma geht, so offenbar xC das Verhältniss des Sinus, zu dem aus C auf e Kante gefällten Perpendikel als Cosinus. Nun gilt aber 7 b) die Proportion sm : sa = mC : Cx. Setzen wir hie-r die entsprechenden Werthe, so erhalten wir

$\frac{2m}{+1}$ s—s : s $= \frac{2m}{m+1}$ s : Cx $= \frac{2m}{m+1} - 1 : 1 = \frac{2m}{m+1}$ s : Cx,

raus die Gleichung Cx $\left(\frac{2m - (m+1)}{m+1}\right) = \frac{2m}{m+1}$ s

$$Cx = \frac{2m}{m-1} s.$$

r Cosinus hiezu Cl (Fig. VIII) ist das Perpendikel im recht-inkligen Dreiecke auf die Hypotenusa, wo ms'C und Cma e Katheten sind, also nach B 10

$$Cr = \frac{Cma \, . \, Cms}{\sqrt{(Cma)^2 + (Cms)^2}} = \frac{m \, . \, \frac{2m}{m+1} s}{\frac{\sqrt{m^2 (m+1)^2 + 2m^2}}{m+1}}$$

$$= \frac{2m^2 s}{\sqrt{m^2 (m+1)^2 + 2m^2}} {}^{*)} = \frac{2ms}{\sqrt{(m+1)^2 + 2}} = \frac{2ms}{\sqrt{m^2 + 2m + 3}}$$

Also $\sin : \cos = \frac{2ms}{m-1} : \frac{2ms}{\sqrt{(m+1)^2+2}}$

$$= \sqrt{(m+1)^2 + 2} : (m-1) = \sqrt{m^2 + 2m + 3} : m - 1.$$

6) Werth der zweierlei Kanten der Leucitoide.

1) Der zu 4 an einem Ecke zusammenstossenden von a nach der Dimension s gehenden A. Diese Kanten laufen von a nach ma (Fig. VI); je 2 derselben stossen in der Dimension s zusammen, es fragt sich nun, wie gross das abgeschnittene Stück as' oder a's' sei. In dem Dreieck ma'Ca entspricht as' unserm x in Fig. III, s'ma' dem y, as'' unserm N, s''a' dem M. Wir suchen nun das Verhältniss von x : y. Dafür haben wir aber x : y = Na : M (a + b), d. h. as' : s'ma' = as' . a'C : s''a' (Ca' + a'ma'), d. h.

$$x : y = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, . \, 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, . \, m = 1 : m$$

$$A = x = \frac{1}{m+1} \, . \, x + y = \frac{1}{m+1} \sqrt{1 + m^2} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$$

Ist m = 2, so ist die Kante $A = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{\tfrac{5}{9}}$

Ist m = 3, so ist die Kante $A = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{5}{8}}$.

2) Der zu 3 an einem Eck zusammenstossenden von der Dimension t nach der Dimension s laufenden B. Diese Kanten laufen von $\frac{2ms}{m+1}$ nach ma; das zwischen $\frac{2ms}{m+1}$ und der Dimension t liegende Stück bleibt, das zwischen diesem und ma liegende wird von der durch 1 a gelegten

*) Da $s = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist $(2s)^2 = 4 \, . \, \tfrac{1}{2} = 2$, also $(2ms)^2 = 2m^2$.

äche in t abgeschnitten. Fig. VIII ist Ca $= 1$, Cs $= 1s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, na $=$ ma $=$ m, as die Diagonale des Octaëders d $= \sqrt{\frac{3}{2}}$, unsere Dimension t, die as schneidet im Verhältniss von :rs $= 2:1$, also ar $= \frac{2}{3}$ d, rs $= \frac{1}{3}$ d. — Cms′ ist gleich $\frac{ms}{+1}$, ms′ ma der Lauf unserer Kante, deren Stück ms′v e gesuchte Kante selbst ist. Ziehen wir nun mam′ parallel , so entspricht ma v unserem N in Fig. III ms′v unserem M, at unserem x, tm′ dem y, mms′ dem b, ms′C dem a und C wird gleich ms $=$ m$\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es ist aber offenbar 1) mat : ar $=$ maC : ac
2) tm′ : sr $=$ m′C : sC,
raus finden wir nun mat i. e. $x = m \cdot \frac{2}{3} d$
tm′ i. e. $y = \frac{1}{3}$ dm. Das gesuchte
wird nun:

$$M : N = ya : x(a + b)$$
$$= \tfrac{1}{3}\,dm \cdot \frac{2m}{m+1} s : \tfrac{2}{3}\,dm \cdot ms = \frac{2ms}{m+1} : 2\,ms$$
$$= \frac{1}{m+1} : 1 = 1 : m + 1, \text{ daraus wird}$$
$$M = \frac{1}{m+2}(M+N) = \frac{1}{m+2}\sqrt{m^2 + \left(\frac{2ms}{m+1}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{m^2(m+1)^2 + 2m^2}}{(m+1)(m+2)} = \frac{m\sqrt{m^2 + 2m + 3}}{(m+1)(m+2)}.$$

Ist m $= 2$, so ist die Kante $= \frac{\sqrt{11}}{6}$

„ „ $= 3$ „ „ „ „ $= \frac{9}{10\sqrt{2}}$

Es verhält sich die Kante A : B

wenn m $= 2$ wie $\frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{\sqrt{11}}{6} = 2\sqrt{5} : \sqrt{11} = \sqrt{20} : \sqrt{11}$

wenn m $= 3$ wie $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{9}}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{5} : \sqrt{9} = 5\sqrt{5} : 3$

ie Kante B ist also stets kleiner als die Kante A.

7) Ebene Winkel der Leucitoide.

Ziehen wir in dem Deltoide des Leucitoides die beiden Diagonalen, so haben wir in dem Verhältniss der verschiedenen Stücke derselben das Verhältniss von Sin : Cos für die Hälften der verschiedenen Winkel, also auch für die ganzen. Wir haben also zunächst diese zu berechnen. Es sei (Fig. XI) am' und am der Verlauf der Kanten A einer Fläche des Leucitoides von a nach ma, as' sei die Länge unserer Kante A, von deren Endpunct die Querdiagonale nach dem Endpuncte der andern, in demselben a mit dieser ersten zusammenstossenden Kante gezogen ist, as die Diagonale dieser Fläche von a nach ms, die von 1 a bis zur Dimension t die Längendiagonale bildet, in ihrem weiteren Verlaufe aber von den beiden andern Flächen, die an demselben t mit ihr zusammenstossen, abgeschnitten wird, so haben wir offenbar die Proportion as' : am' = s'l : m's = al : as (B 8)

as ist $= \sqrt{1 + (m.s)^2}$, m's = m . s = $m\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es ist dies zugleich für den halben ebenen Endspitzenwinkel mas das Verhältniss von sin : cos = ms : $\sqrt{1 + (ms)^2}$

für m = 2 giebt dies sin : cos = $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Den Werth der halben Querdiagonale finden wir auf folgende Weise: Da nach p. 44 as' : am' = x : x + y = 1 : m + 1 = s'l : sm' ist, so wird $s'l = \frac{ms}{m+1}$

bei m = 2 giebt dies $\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{3}$, für die ganze $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

„ „ = 3 „ „ $\frac{3\sqrt{\frac{1}{2}}}{4}$ „ „ „ $\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

für die Längendiagonale finden wir folgendes:

Es ist Fig. VII at'ms = $\sqrt{1 + (m.s)^2}$, unsere Diagonale ist at'. Nach dem Lehrsatz finden wir

* x : y = Na : M (a + b)

at' : t'ms = $\frac{2}{3}$ d . s : $\frac{1}{3}$ d . sm = 2 : m

*) Die Buchstaben und die Werthe sind dieselben wie p. 41.

$$at' = \frac{2}{m+2}(x+y)\,(A\,5) = 2\,\frac{\sqrt{1+(ms)^2}}{m+2} = \frac{\sqrt{4+2\,m^2}}{m+2}$$

bei m = 2 giebt dies $\frac{\sqrt{3}}{2}$

„ „ = 3 „ „ $\frac{\sqrt{22}}{5}$.

Es verhalten sich also die beiden Diagonalen, wenn m = 2 wie $\frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{2} : 3\sqrt{3} = \sqrt{32} : \sqrt{27}$.

Das durch die Querdiagonale abgeschnittene Stück der Längendiagonale ist leicht zu finden. Es ist nehmlich offenbar (Fig. XI)

al : as = as' : am' = 1 : m + 1 (pag. 46)

$$al = \frac{as}{m+1} = \frac{\sqrt{(ms)^2+1}}{m+1} \text{ bei } m = 2 \text{ giebt dies } al = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

„ „ = 3 „ „ „ $= \sqrt{\frac{11}{32}}$

Es verhält sich also das Stück al zur ganzen Längendiagonale

$$al : at = \frac{\sqrt{(ms)^2+1}}{m+1} : \frac{2\sqrt{(ms)^2+1}}{m+2} = m+2 : 2m+2$$

bei m = 2 giebt dies, wie 2 : 3

„ „ = 3 „ „ „ 5 : 8

für das Stück lt erhalten wir

$$tl = at - al = \frac{2\sqrt{(ms)^2+1}}{m+2} - \frac{\sqrt{(ms)^2+1}}{m+1}$$

$$= \frac{2(m+1)\sqrt{ms^2+1} - (m+2)\sqrt{(ms)^2+1}}{(m+2)\,(m+1)}$$

$$= \frac{m\sqrt{(ms)^2+1}}{(m+2)\,(m+1)}$$

für m = 2 giebt dies $tl = \frac{\sqrt{3}}{6}$

„ m = 3 „ „ $tl = \frac{3\sqrt{\frac{11}{2}}}{10}$

für den ebenen Winkel s'al hatten wir:

sin : cos = ms : $\sqrt{(ms)^2+1}$

für den ebenen Winkel s'tl haben wir:

$$\sin : \cos = s'l : lt = \frac{sm}{m+1} : \frac{m\sqrt{(ms)^2+1}}{(m+2)(m+1)}$$
$$= (m+2)s : \sqrt{(ms)^2+1}$$

bei m = 2 giebt dies $= 2\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{8} : \sqrt{3}$

„ m = 3 „ „ $= 5\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{11}{2}} = 5 : \sqrt{11}$

für den ∢ ts'a finden wir, da er durch die Querdiagonale in 2 Theile getheilt ist, nach dem Satz

$$\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y,$$

wo wir ∢ t's t als x und ls'a als y bezeichnen wollen

$$\sin : \cos = lt . s'l + s'l . al : s'l . s'l - lt . al$$
$$= (lt + al)\, s'l : (s'l)^2 - lt . al$$
$$= \frac{2\sqrt{1+(ms)^2}}{m+2} . \frac{sm}{m+1} : \left(\frac{sm}{m+1}\right)^2 - \frac{m\sqrt{(ms)^2+1}}{(m+2)m+1)} . \frac{\sqrt{(ms)^2+1}}{m+1}$$
$$= \frac{2\,sm\sqrt{1+(ms)^2}}{(m+2)(m+1)} : \left(\frac{sm}{m+1}\right)^2 - \frac{m\,(ms)^2\,(+1)}{(m+2)(m+1)^2}$$
$$= \frac{2\,sm . (m+1)\sqrt{(ms)^2+1}}{m+2} : (ms)^2 - \frac{m\,((ms)^2+1)}{m+2}$$
$$= 2\,sm . (m+1) . \sqrt{(ms)^2+1} : (m+2)\,(ms)^2 - m\,((ms)^2+1)$$
$$= 2s . (m+1)\sqrt{(ms)^2+1} : 2s^2m - 1$$
$$(m+1)\,s\sqrt{2m^2+4} : m - 1$$

für m = 2 giebt dies $= 3\sqrt{6} : 1$

„ m = 3 „ „ $= 2\sqrt{11} : 1.$

Ebenso hätte man die ebenen Winkel aber auch mit Hülfe der bekannten trigonometrischen Formeln aus den bekannten Seiten der beiden Dreiecke, in welche das Deltoid der Leucitoide durch die Längendiagonale getheilt wird, as't (Fig. XI) berechnen können.

8) Gränzen und beobachtete Werthe für m.

Wird m = 1, so entsteht aus dem Leucitoëder das Octaëder, wird es = ∞, so wird dies der Würfel. Die

Fläche der Leucitoide fällt also stets zwischen die Octaëder- und Würfelfläche. Die beobachteten Werthe für m sind nach **Naumann** *) $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{8}{3}$, 3, 4, 6, 12, 40 (?).

§. 23. **Die Pyramidenoctaëder** [a:a:na] (Taf. II, Fig. 11) (Po und po Taf. I und II), Triakisoctaëder (m O) (**Naumann**). Octaëdrisches Trigonalicositetraëder (**Mohs**). Pyramidenachtflach (**von Raumer**).

Sie sind begränzt von 24 gleichschenkligen Dreiecken, die sich zu 3 über einer Octaëderfläche als 3seitige Pyramide erheben, haben 12 mit den Octaëderkanten zusammenfallende Kanten A und 24 über der Mitte der Octaëderfläche zu je 3 in einer Ecke zusammenlaufende C; ausser den 8 eben erwähnten 3kantigen regulären Ecken erscheinen an ihnen noch 6, mit den Octaëderecken zusammenfallende symmetrische 4 und 4kantige.

1) **Das Verhältniss der 3erlei Dimensionen ist**

$$a' : s' : t' = a : s : \frac{3n}{2n+1} t.$$

Da die eine Art der Kanten der Pyramidenoctaëder von a nach a läuft, so ist sowohl die Dimension a, wie die aus dem Mittelpunct auf die Mitte der Octaëder- und also auch Pyramidenoctaëderkante laufende Dimension s gleich denen des Octaëders, also $a' = a$, $s' = s$.

Berechnung von t.

Die Fläche des Pyramidenoctaëders läuft durch 1 a und 1 a und 1 s gelegt nach na; wie wird nun von dieser Fläche t geschnitten? In Fig. IX sei wieder $Ca = a = 1$, $Ct' = t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $Cs = s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $naC = na$, $Cns = ns$, nans parallel as, $as = d$, $at'' = \frac{2}{3} d$, $ts'' = \frac{1}{3} d$ (cfr. pag. 35) $nans = nd$, so erhalten wir nach der Formel

$$N : M = x (a + b) : ya$$

$Ct' : tt' = Cs\ (nans) : nss . nat.$ Setzen wir hiefür

*) Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie. Auch für die übrigen Körper sind die Werthe ihrer Ableitungszahlen m und n daher entnommen.

die entsprechenden Werthe ein, so giebt dies

$$Ct' : tt' = s . nd : (n-1) s . \tfrac{2}{3} nd = 1 : \tfrac{2}{3} (n-1)$$

$$= 3 : 2n - 2$$

$$Ct' = \frac{3}{2n+1} Ct,$$

da aber $Ct'' : Ct = Ca : Cna = 1 : n$, so ist $Ct = nCt''$ $= n . t = n\sqrt{\tfrac{1}{3}}$,

$$\text{also } Ct' = \frac{3n}{2n+1} . t.$$

Es ist also die Dimension t die $\frac{3n}{2n+1}$ fach grössere von der des Octaëders; ist $n = 2$, so ist sie die $\frac{6}{5}$fach grössere. In Zahlen ist sie dann $= \frac{6}{5} \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{2}{5} \sqrt{3}$.

2) Neigungswinkel der Flächen gegen die Achse.

Wir können hier 2erlei Neigungsverhältnisse ins Auge fassen, nehmlich die der Fläche a : a : na gegen eine Achse a oder gegen die Achse na.

1) Gegen die Achse a.

Denken wir uns die Fläche durch 1 a, senkrecht auf unserm C Fig. XII stehend angenommen, gelegt, so schneidet sie das zweite a ebenfalls in der Einheit, Ca' unsrer Fig. das andere in einer Entfernung na — Cna' unsrer Fig. den Sin. der Neigung dieser Fläche giebt uns offenbar das aus C auf diese Fläche gefällte Perpendikel Cs, während unser auf C senkrecht stehendes a selbst den Cosinus dazu darstellt.

Wir haben also sin : cos = Cs : a

$$\text{Cs ist gleich } \frac{a'C . Cna'}{\sqrt{(a'C)^2 + (Cna')^2}} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \text{ also}$$

$$\sin : \cos = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} : 1 = n : \sqrt{n^2+1}$$

$$\text{bei } n = 2 = 2 : \sqrt{5}.$$

2) Neigung gegen na.

Offenbar ist hier für die Neigung der Fläche

$$\sin : \cos = s : na = s : n$$

$$\text{bei } n = 2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : 2 = 1 : 2\sqrt{2}.$$

3) Neigung der Kanten gegen die Achse.

1) Die der Octaëderachse entsprechende von a nach a gehende hat natürlich auch dieselbe Neigung, wie diese sin : cos = a : a, also 45^0.

2) Die von a nach t verlaufenden Kanten werden durch 2 Flächen gebildet, welche 1 a gemeinschaftlich haben, aber das a der andern, die Kante mit bildenden Fläche, in na schneiden. Die Kante läuft also von 1 a nach demjenigen Theil von s, der von den beiden in der Ebene, die durch a, t und s gelegt gedacht wird, sich schneidenden Flächen abgeschnitten wird.

In Fig. VI sei Ca = Ca· = 1 a, Cma′ = Cma = na, Cs die Dimension s, so ist offenbar Cs′ das gesuchte Stück. Für dieses haben wir aber §. 22. 1 bereits gefunden

$\mathrm{Cs} = \frac{2\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}+1}\,\mathrm{s}$, da wir aber hier n statt m als Coëfficienten für a gesetzt haben, muss es $\frac{2\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$ s heissen. Dieses Stück von s giebt uns nun das Verhältniss des Sinus, wenn a der Cosinus ist. Wir haben daher

$$\sin : \cos = \frac{2\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\,\mathrm{s} : 1 = 2\,\mathrm{n}\,\mathrm{s} : \mathrm{n}+1.$$

Es ist die $\frac{2\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$ fach stumpfere als die Neigung der Octaëderfläche gegen die Achse.

Die Fläche der Leucitoide hatte sin : cos = ms : 1. Die gerade Abstumpfung dieser Kanten eines Pyramidenoctaëders wird daher immer einem bestimmten Leucitoide entsprechen. Der Werth für dieses lässt sich dann leicht berechnen, es ist offenbar dann das, dessen $\mathrm{m} = \frac{2\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$ ist. Hat z. B. ein Pyramidenoctaëder n = 2, so ist das Leucitoid, das aus ihm auf die angegebene Weise entsteht, dasjenige, dessen $\mathrm{m} = \frac{4}{3}$ ist, und für n = 3 ist es das, wo $\mathrm{m} = \frac{3}{2}$.

Es ergiebt sich auch daraus, dass m stets kleiner als 2 bleiben muss, also stets einen unächten Bruch darstellen muss. Denn n + 1 ist ja immer grösser als die Hälfte von 2 n, also kann der Bruch nie den Wérth von 2 erreichen oder gar übersteigen. Alle Leucitoide also, die durch Abstumpfung der 24 Kanten C der Pyramidenoctaëder entstehen, müssen schärfer gegen die Achse a geneigt sein als die gewöhnlichen, wo m = 2 oder m = 3 und werden also zwischen die Fläche dieses und die Octaëderfläche zu liegen kommen. Bis jetzt ist von solchen nur das, dessen $m = \frac{3}{2}$ ist, beobachtet worden.

4) **Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.**

1) In den bleibenden Octaëderkanten A.

Für die Neigung der halben Winkel beim Octaëder hatten wir als Cosinusverhältniss das Perpendikel aus dem Mittelpunct auf die Kante, also unsere Dimension $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; diesen können wir auch für das Pyramidenoctaëder beibehalten, Sinus des Octaëders war dann das auf s senkrechte a, beim Octaëder = 1 a, hier ist es jedoch das na, also sin : cos = na : s, sie hat die nfach stumpfere Neigung, als die Kante des Octaëders. Fig. IX ist aC : Cs = sin : cos des halben Octaëderkantenwinkels, Cna : sC = sin : cos für denselben beim Pyramidenoctaëder.

2) In den zu 3 über der Mitte der Octaëderfläche zuzammenstossenden Kanten C.

Diese Kanten laufen von 1 a über t nach $\frac{2\,n}{n + 1}$ s, (cfr. §. 23. 3,2) also wie die entsprechenden Leucitoidkanten, mit dem Unterschiede jedoch, dass diese von $\frac{2\,m}{m + 1}$ s nach ma läuft, weswegen bei ihr das Stück von der Dimension t bis a aus der Begränzung wegfällt, was gerade bei der Pyramidenoctaëderkante das bleibende ist, während bei dieser

dagegen das Stück von t nach $\frac{2m}{m+1}$ s verschwindet. Halbiren wir wieder den Kantenwinkel durch eine durch a, t und s gelegte Ebene, so haben wir gerade wie für die Neigung der Leucitoidkante als Cosinus das Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Kante, als Sinus denjenigen Theil der auf dieser Ebene senkrechten Dimension, welcher durch unsere Fläche in ihrer Verlängerung von ihrem $\frac{2n}{n+1}$ s über ihr 1 a hinaus von diesem 2ten s abgeschnitten wird. Wir haben (§. 22.5.2) Fig. X gefunden, dass dann das abgeschnittene Stück $= \frac{2m}{m-1}$ s, hier also $\frac{2n}{n-1}$ s wird. Demnach ist

$$\sin:\cos = \frac{2n}{n-1}s : \frac{\frac{a\,.\,2ns}{n+1}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{2ns}{n+1}\right)^2}} = \frac{2ns}{n-1} : \frac{2ns}{\sqrt{(n+1)^2+(2ns)^2}}$$

da ja a = 1 gesetzt wurde.

$$= \sqrt{(n+1)^2+(2ns)^2} : n-1$$
$$= \sqrt{3n^2+2n+1} : n-1.$$

5) **Werth der Kanten der Pyramidenoctaëder.**

1) Die 12 von a nach a laufenden A haben — wie beim Octaëder — den Werth $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}$.

2) Die Kanten C. Sie laufen von 1 a über t nach $\frac{2ns}{n+1}$.

Es sei Fig. VII Ca = a, Cms $= \frac{2ns}{n+1}$, Ct unsere Dimension t, so ist at′ unsere Kante C. Dieselbe finden wir nach der Formel

$$x : y = Na : M\,(a+b)$$

$$at' : t'ms = at'' \,.\, Cs : t''s \,.\, Cms = \tfrac{2}{3}\,ds : \tfrac{1}{3}\,d\,\frac{2n}{n+1}s$$
$$= n+1 : n,$$

also $at' = \frac{n+1}{2n+1} ams = \frac{n+1}{2n+1} \sqrt{1+\left(\frac{2ns}{n+1}\right)^2}$

$= \frac{n+1\sqrt{(n+1)^2+(2ns)^2}}{(n+1)(2n+1)} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+(2ns)^2}}{2n+1}$

$= \frac{\sqrt{3n^2+2n+1}}{2n+1}$

Ist $n = 2$, so giebt dies at' i. e. die Kante $C = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

6) Ebene Winkel der Pyramidenoctaëder.

Da die Flächen der Pyramidenoctaëder gleichschenklige Dreiecke bilden, so brauchen wir nur einen der Winkel zu kennen, um daraus die andern zu berechnen, da die zwei gleichen Winkel den 3ten zu 180° ergänzen und umgekehrt. Ziehen wir aus der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes das Perpendikel auf die Grundlinie, die gleich ist der Octaëderhante, so haben wir in dieser Linie und der halben Grundlinie das Verhältniss von sin : cos für die beiden gleichen Winkel und für den halben Winkel an der Spitze des Dreieckes. Den Werth dieses Perpendikels finden wir leicht auf folgende Weise. Es läuft diese Linie von 1 s durch die Dimension t, wo die Spitze des Dreieckes liegt, nach na. In Fig. IX sei $Cs = s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $Cna = na = n$, $Cns = ns$, $sa =$ der Diagonale des Octaëders von s nach a, so ist das Stück st' unser gesuchtes Perpendikel. Die übrigen Linien und deren Werthe haben wir §. 23. 1 bei Berechnung der Dimension t für die Pyramidenoctaëder schon erläutert. Dort suchten wir die Linie Ct', jetzt suchen wir st'; hier gilt nun die Proportion $M : N = ya : x(a+b)$ d. h.

$$st' : t'na = tns \,.\, sC : nat \,.\, nsC$$
$$= \tfrac{1}{3} dn \,.\, s : \tfrac{2}{3} dn \,.\, ns = 1 : 2n$$

$$st' = \frac{1}{2n+1} sna = \frac{1}{2n+1}\sqrt{n^2+s^2} = \frac{\sqrt{n^2+s^2}}{2n+1}$$

Ist $n = 2$, so giebt dies $st' = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}}{5} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Demnach ist für den Winkel an der Grundlinie

$$\sin : \cos = \frac{\sqrt{n^2 + s^2}}{2n + 1} : s^{*}) = \sqrt{n^2 + s^2} : (2n + 1)s$$

bei n = 2 giebt dies $\sin : \cos = \sqrt{\frac{9}{2}} : 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 3 : 5$.
Für den halben Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes findet das umgekehrte Verhältniss von sin : cos statt, es ist $= (2n + 1)s : \sqrt{n^2 + s^2}$.

7) Gränzen und beobachtete Werthe für n.

Wird n = 1, so entsteht das Octaëder, wird $n = \infty$, so giebt dies das Granatoëder. Die Fläche der Pyramidenoctaëder liegt also stets zwischen der Octaëder- und der Granatoëderfläche. Beobachtet wurde $n = \frac{3}{2}$, 2, 3 auch $\frac{65}{64}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 4$.

§. 24. Die Pyramidenwürfel (Taf. II, Fig. 18. Pw. und pw. Taf. I und II) [a : ma : ∞ a] Tetrakishexaëder ∞ On (Naumann), hexaëdrisches Trigonalicositetraëder (Mohs).

Sie haben ebenfalls 24 Flächen, die gleichschenklige Dreiecke sind, haben 24 zu 4 in einem Ecke über der Würfelfläche zusammenstossende Kanten C und 12 B, die ihrer Lage nach den Würfelkanten entsprechen, 6 4kantige reguläre Ecken über der Mitte der Würfelfläche, den Octaëderecken entsprechend, und 8 symmetrische 3 und 3kantige den Würfelecken entsprechende. Den Namen Pyramidenwürfel haben sie von ihrem Aussehen, indem sie erscheinen wie ein Würfel auf dessen 6 Flächen 6 vierseitige Pyramiden aufgesetzt sind.

1) Das Verhältniss der 3 Dimensionen ist bei ihnen

$$a : s' : t' = 1 : \frac{2m}{m+1}\,s : \frac{3m}{m+1}\,t.$$

1) Berechnung für s.

Die Fläche eines Pyramidenwürfels läuft von a nach ma,

*) Die halbe Octaëderkante ist ja $= s = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

also gerade wie die Kante eines Leucitoides, sie schneidet also das zwischen a und ma gelegene s in derselben Weise wie ein von a nach ma laufendes Leucitoid, nach (§. 22. 1) $= \frac{2\,m}{m+1}$. s; ist m = 2, so giebt dies $\frac{4}{3}$. s.

2) Berechnung für t.

Die Fläche des Pyramidenwürfels schneidet durch 1 a gelegt parallel dem 3ten gehend, ma von dem 2ten a, von den andern s schneidet sie dann jedesmal 2 m . s. Es ist in Fig. XIII unter der Voraussetzung, dass Ca und Ca' = a = 1, Cs unsere Dimension s, aa' die Octaëderkante, nach §. 20 Cg' = 2 Cs = 2 s. Jede Linie, die parallel mit a' Ca' oder gg' gezogen wird, schneidet die Dimension s immer im Verhältniss von Ca : Cg' d. h. im Verhältniss von 1 a : 2 s. Wird also a im Verhältniss von m geschnitten, so wird s im Verhältniss von 2 m s geschnitten. Die Kante des Pyramidenwürfels läuft also von 1 a nach 2 m s, und ist Begränzung zwischen 1 a und der Dimension t.

Es sei nun Fig. VII Cms = 2 m s, Ca = a = 1, Ct unsere Dimension t, ms ma parallel sa, so ist offenbar Cs : Ca = 1 s : 1 a = Cms : Cma, wenn Cms = 2 m s, so ist Cma = 2 ma; as sei wieder die Octaëderdiagonale = d, at'' = $\frac{2}{3}$ d, t''s = $\frac{1}{3}$ d wie pag. 49, so ist nach der Proportion N : M = x (a + b) : y a, Ct' : tt' = Ca . msma : am a . tms, dies giebt Ct' : tt' = 1 . 2 md : (2 m — 1) $\frac{1}{3}$ 2 md = 3 : 2 m — 1 und Ct' $= \frac{3}{2\,m+2}$. Ct $= \frac{3}{2\,m+2}$. 2 m t, t' $= \frac{3\,m}{m+1}$ t.

Es ist ganz dieselbe Formel, wie für die Dimension t der Leucitoide, mit dem Unterschiede, dass hier immer 2 m statt m genommen werden muss, t' ist also bei den Pyramidenwürfeln stets die $\frac{3\,m}{m+1}$ fache von dem t des Octaëders.

Für n = 2 giebt dies t' = 2 t = $2\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

2) **Neigungswinkel der Flächen gegen die** chse.

Die Fläche läuft von 1 a nach ma (Fig. XV) und geht m 3ten a parallel. Dieses ma ist also der Sinus, wenn a der Cosinus ist, also sin : cos = ma : a = m : 1 für n Winkel gegen a, gegen ma hat sie die umgekehrte igung, hier ist sin : cos = a : ma.

3) **Neigungswinkel der Kanten gegen die** chse.

Die Kante C läuft von a nach 2 m s. Sie hat also sin : cos 2 m s : 1, die Kante B, welche von t nach t läuft, geht rallel a, ist gegen kein Dimension a geneigt, wie die ürfelkante auch.

4) **Neigungswinkel der Flächen in den Kanten** gen einander.

1) In den Kanten C zwischen a und t.

Diese Kanten laufen von 1 a nach 2 m s. Nehmen wir ieder den halben Winkel, so geht die halbirende Ebene urch a und s und nehmen wir dann als Cosinus wieder das erpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Kante, so wird der nus der Theil des auf der halbirenden Ebene senkrechten s, lcher von unserer Fläche abgeschnitten wird; es ist dies enfalls 2 m s, da die Fläche die beiden s, zwischen wel- en ma in der Mitte liegt in gleichen Entfernungen schneidet, e aus der Projection der Pyramidenwürfelfläche Fig. XIII d Tab. A Pw. ersichtlich.

Es ist also Cosinus = dem Perpendikel in dem recht- inkligen Dreieck, wo a und 2 m s die Katheten sind, aus m rechten Winkel auf die Hypotenuse, also $\frac{a \cdot 2ms}{\sqrt{a^2 + (2ms)^2}}$

d da a = 1 ist sin : cos = $2ms : \frac{2ms}{\sqrt{1 + (2ms)^2}}$

$$= \sqrt{1 + 2m^2} : 1.$$

Ist m = 2, so giebt dies sin : cos = 3 : 1.

2) **Neigungswinkel der Flächen in der Kante B.** Die Fläche der Pyramidenwürfel läuft von 1 a nach ma und schneidet die Dimension s in der Entfernung $\frac{2m}{m+1}s$ $=$ Cs' Fig. XV vom Mittelpunct. Je 2 Flächen schneiden sich in der Dimension s und bilden hier den Neigungswinkel as'a' Fig. XV. Dieser Winkel wird von einer durch unsere Dimension s und den Mittelpunct gelegten Ebene halbirt. Für diesen halben Neigungswinkel ist $\sin : \cos = as : ss' = s : \frac{2m}{m+1}s - s$

$= m + 1 : m - 1.$

Ist $m = 2$, so giebt dies $\sin : \cos = 3 : 1$.

Es ist dies derselbe Werth wie für die Neigung in der Kante $C_{,}$, wenn $m = 2$, in diesem Falle sind also die Kantenwinkel sämmtlich gleich. Das Verhältniss von $\sin : \cos = 3 : 1$ ist aber auch das der Fläche gegen die Achse wenn $m = 3$; umgekehrt hat die Fläche des Pyramidenwürfels, der für m den Werth 2 hat, dieselbe Neigung gegen die Achse a, wie der, welcher den Werth $m = 3$ hat in seiner Kante B.

Können diese beiden Neigungen, d. h. in der Kante B und die der Fläche gegen die Achse a an einem Körper sich je gleich werden? Sollte dies der Fall sein, so müsste offenbar das Verhältniss von $\sin : \cos$ für beide Winkel sich gleich werden, also $m : 1 = m + 1 : m - 1$, daraus ergäbe sich für m der Werth $m = \frac{m+1}{m-1}$, was krystallographisch unmöglich ist.

5) **Werth der Kanten der Pyramidenwürfel.**

1) **Der Kanten C.** Sie laufen von a über t nach 2ms, jedoch bleibt nur das Stück zwischen a und t als Kante sichtbar, das übrige wird von den andern Flächen abgeschnitten. In Fig. VII seien die Werthe aller Stücke gleich denen, wie wir sie zur Berechnung von at' als Diagonale der Leucitoide (§. 22. 7) angegeben haben, nur Cms ist jetzt $= 2$ms. Wir finden dann nach der Formel $x : y = Na : M(a + b)$

: $tms = \frac{2}{3} ds : \frac{1}{3} d . 2ms = 1 : m$, $at' = \frac{1}{m+1}$ von $(x+y)$,

n ams, also $C = at' = \frac{\sqrt{1+(2ms)^2}}{m+1} = \frac{\sqrt{1+2m^2}}{m+1}$.

Ist $m = 2$, so giebt dies $at' = 1$. Die Kante C ist also diesem Falle gleich der Achse a.

2) Der Kanten B.

Die Kante B ist die eines Würfels, auf den je 4 Flächen s Pyramidenwürfels aufgesetzt sind, oder gleich dem Flächenrchmesser $\doteq 2a$ des in den Pyramidenwürfel eingeschlosnen Würfels. Es sei (Fig. XIV) $Ca = 1$, asm der Lauf ner der Pyramidenwürfelfläche, am' der der 2ten, so ist sl eich dem halben Flächendurchmesser, gleich der halben nte des eingeschlossenen Würfels, der halben Kante B. ir finden dieses Stück sl leicht auf folgende Weise. Man ehe aa = der Octaëderkante, Cs' ist dann unsere Dimenon s, $as' = s'a^{\cdot} = s$ und nach der Formel

$$x : y = Na : M (a + b)$$

$$as : sm = s'a . a^{\cdot}C : a^{\cdot}s' . mC = 1 : m,$$

$$\text{also } as = \frac{1}{m+1} \text{ von } am.$$

Nun ist $as : am = sl : mC$, also $sl = \frac{1}{m+1}$ von Cm,

$$\text{also } sl = \frac{m}{m+1}$$

lglich die ganze Kante $B = \frac{2m}{m+1}$

für $m = 2$ giebt dies $B = \frac{4}{3}$

„ $m = 3$ „ „ $B = \frac{3}{2}$.

Welchen Werth bekommt m, wenn die beiden Kanten und C einander gleich werden sollen?

Offenbar muss dann $\frac{\sqrt{1+2m^2}}{m+1} = \frac{2m}{m+1}$ sein. Dies aufgelöst giebt

$$1 + 2m^2 = 4m^2$$

$$1 = 2m^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = m.$$

Es lässt sich also wohl geometrisch ein solcher Körper construiren, in der Natur kommt derselbe jedoch nicht vor, da alle Werthe für die Ableitungszahlen der Grunddimensionen der Krystalle nur in einfachen rationalen Zahlen sich ausgedrückt finden, alle andern aber ausgeschlossen sind.

6) Ebene Winkel der Pyramidenwürfel.

Wie bei den Pyramidenoctaëdern haben wir nur einen Winkel zu berechnen, um die andern zu finden, da die Flächen des Pyramidenwürfels ebenfalls gleichschenklige Dreiecke sind. Sin und Cos für die ebenen Winkel giebt uns die halbe Kante B und die Höhenlinie des Dreiecks = as Fig. XIV. Bei Berechnung der Kante B haben wir für dieses Stück gefunden

$$as = \frac{1}{m+1} \text{ von am, am ist aber } = \sqrt{1+m^2},$$

$$\text{also } as = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}.$$

Also ist für den halben Endspitzenwinkel cos : sin = as : halben

$$\text{Kante B} = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1} : \frac{m}{m+1} = \sqrt{m^2+1} : m$$

bei $m = 2$ giebt dies $\sqrt{5} : 2$

für die 2 Winkel zwischen der Kante B und C

$$\cos : \sin = m : \sqrt{m^2+1}$$

bei m 2 wie $2 : \sqrt{5}$.

7) Gränzen und beobachtete Arten von Pyramidenwürfeln.

Die Pyramidenwürfelfläche [a : ma : ∞ a] fällt zwischen die Würfelfläche und die Granatoëderfläche. Wird nehmlich $m = \infty$, so entsteht daraus der Würfel, wird es = 1, so entsteht daraus das Granatoëder. Die beobachteten Werthe von m sind $\frac{5}{4}$ (?) $\frac{3}{2}$, 2, 3, $\frac{5}{2}$, 4.

§. 25. Die Hexakisoctaëder (Taf. II, Fig. 23. Ho und ho Taf. I und II) [a : ma : na] od. [$a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a$] (Weiss),*) mOn Naumann, Tetrakontaoctaëder (Mohs), Pyramidengranatoëder zum Theil (Weiss), Pyramidenrautenzwölfflach (v. Raumer).

Sie sind von 48 ungleichseitigen Dreiecken begränzt, haben also 3erlei Kanten, von jeder Art 24, 6 den Octaëderecken entsprechende symmetrische 4 und 4kantige Ecken, 12 über der Mitte der Octaëderkanten gelegene symmetrische 2 und 2kantige und 8 über der Mitte der Octaëderflächen gelegene symmetrische 3 und 3kantige. Taf. I A ist der Verlauf von je 8 durch 1 a gelegten Flächen auf der Ebene, die durch die beiden andern a gelegt ist, (Taf. II 1) der Hauptdurchschnitt durch 2 Achsen a und a, 2) der Durchschnitt durch eine Achse und eine Dimension s und t dargestellt.

1) Das Verhältniss der 3 Dimensionen ist

$$a' : s' : t' = a : \frac{2m}{m+1} s : \frac{3mn}{mn+m+n} t.$$

1) Berechnung für s.

Die Fläche des Hexakisoctaëders läuft von a über s nach ma, und bildet mit der benachbarten Fläche in dieser Ebene eine von a nach ma' (Fig. VI) laufende Kante und wird in s von der von a nach ma verlaufenden Kante geschnitten. Sie hat also denselben Lauf wie die Leucitoidkante A, schneidet

*) Vergl. Weiss: Theorie der Hexakisoctaëder des regulären Krystallsystems etc. Abh. der Berliner Ac. der Wiss. A. d. J. 1837. Ich habe der Gleichförmigkeit wegen bei allen Körpern die kleinste Dimension a = 1 angenommen; in der erwähnten Arbeit ist das grösste a = 1, die beiden andern als $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ angenommen. Es verhalten sich aber die Körper [a : ma : na] und [$a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a$], wie die um das Octaëder und die in das Octaëder verzeichneten Körper derselben Art.

also dasselbe Stück der Dimension s ab. Es ist dieses das Stück $\frac{2m}{m+1}$ s. Den Beweis siehe (§. 22. 1).

2) Berechnung von t.

Je 2, von a und a· nach ma· und ma laufende Flächen *) schneiden sich, wie wir sahen, in $\frac{2m}{m+1}$ s, das dritte a schneiden sie gemeinschaftlich in der Entfernung na··. Sie bilden also eine Kante, die von $\frac{2m}{m+1}$ s über die Dimension t' nach na verläuft. Welches Stück wird dann von t' abgeschnitten?

Es sei (Fig. IX Cna = na, Cs' = $\frac{2m}{m+1}$ s, Ct die Dimension t, so ist Cr das gesuchte Stück von Ct.

Man ziehe as so, dass Ca = 1 a, Cs = 1 s, also as = der Octaëderdiagonale = d sei, ferner von na die Linie nans parallel as, so ist offenbar Cns = ns und nans = nd, nat = $\frac{2}{3}$ nd, tns = $\frac{1}{3}$ nd, da ja Ca : Cna = Cs : Cns = as : nans d. h. 1 a : na = s : ns = d : nd, ebenso Ca : Cna = at'' : nat = $\frac{2}{3}$ d : $\frac{2}{3}$ nd u. s. w. Wir finden daraus nach der Formel N : M = x (a + b) : ya

$$\begin{aligned} Cr : rt &= Cs' \text{ (nans)} : nss' \,.\, nat \\ &= \frac{2m}{m+1} s \,.\, nd : \left(\frac{ns - 2ms}{m+1}\right) \tfrac{2}{3} nd \\ &= \frac{6m}{m+1} : \frac{n(m+1) - 2m \,.\, 2}{m+1} \\ &= 3m : n(m+1) - 2m \\ Cr &= \frac{3m}{m + n(m+1)} \text{ von N + M i. e. von n . t} \\ &= \frac{3mn}{mn + m + n} t. \end{aligned}$$

*) Wir unterscheiden hier die 3 Dimensionen a, eines sei a, das 2te a·, das dritte a··, um besser den Verlauf der zwei erwähnten Flächen bezeichnen zu können.

2) **Neigungswinkel der Flächen.**

Die Flächen der Hexakisoctaëder sind, da sie von allen 3 Achsen verschiedene Stücke abschneiden, gegen alle drei verschieden geneigt. Wir müssen daher ihre Neigung gegen die Achse a, gegen ma und gegen na besonders betrachten. Wir finden diese Neigungen

gegen a . $\sin : \cos = mn : \sqrt{m^2 + n^2}$

„ ma . $\sin : \cos = n : m\sqrt{1 + n^2}$

„ na . $\sin : \cos = m : n\sqrt{1 + m^2}$.

1) Gegen a. Die Fläche läuft von a nach ma· und na·· (Fig. XVI) von m nach n. Wählen wir a als Cosinus, so ist Sinus das Perpendikel aus dem Mittelpunct auf die Linie mn, die von ma· nach na·· läuft, also $\sin : \cos = \frac{Cm\ .\ Cn}{\sqrt{(mn)^2}} : a$

$$= \frac{m\ .\ n}{\sqrt{m^2 + n^2}} : a = mn : \sqrt{m^2 + n^2} \text{ wie oben.}$$

2) Gegen ma. Wählen wir ma als Cosinus, so ist, da die Fläche auf der durch die beiden übrigen a gelegten Ebene von 1 a· nach na·· läuft a·n (Fig. XVII), dann wieder das Perpendikel aus C auf die Linie a·n der Sinus,

$$\text{also } \sin : \cos = \frac{Ca\ .\ Cn}{\sqrt{(an)^2}} : ma = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} : m$$

$$= n : m\sqrt{1 + n^2}, \text{ wie oben.}$$

3) Gegen na. Es sei wieder na der Cosinus, so ist hier (Fig. XVIII) da der Verlauf der Fläche von a· nach ma·· geht, Sinus das Perpendikel aus C auf die Linie a·m,

$$\text{also } \sin : \cos = \frac{Ca\cdot\ .\ Cm}{\sqrt{(a\cdot m)^2}} : na = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} : n$$

$$= m : n\sqrt{1 + m^2} \text{ wie oben.}$$

4) **Gegen die Dimensionen s.**

Wie werden die verschiedenen Dimensionen s von der Fläche | a : ma : na | geschnitten?

a) Die auf $Cs' = \frac{2mn}{m+n}s$ senkrechte (Cx Fig. XIX) wird $= \frac{2mn}{n-m}s.$

Es sei $Cs' = \frac{2mn}{m+n}s$, $Cm' = ma$, smx die Verlängerung der Linie, welche unsere Fläche in der durch ma und na gelegten Ebene bildet. Ziehen wir nun m'rm parallel der Octaëderkante a··a·, so ist Cr = ms = rm' und es ist

$$s'r : rm' = s'C : Cx \text{ d. h.}$$

$$\frac{2mn}{m+n}s - ms : ms = \frac{2mn}{m+n}s : Cx$$

$$2mns - m(m+n)s : ms = 2mns : Cx$$

$$mns - m^2s : ms = 2mns : Cx$$

$$n - m : 1 = 2mns : Cx, \; Cx = \frac{2mns}{n-m}$$

b) Die auf $\frac{2m}{m+1}s$ senkrechte wird $= \frac{2m}{m-1}s.$

Es sei (Fig. XIX) Cx senkrecht auf $Cs = \frac{2m}{m+1}s$, so wird jetzt Cm = a, rC = s = rm' und s'r : rm' = sC : Cx wird

$$\frac{2m}{m+1}s - s : s = \frac{2m}{m+1}s : Cx$$

$$m - 1 : 1 = 2ms : Cx$$

$$Cx = \frac{2ms}{m-1} \text{ wie oben,}$$

daraus finden wir für die Neigung unserer Fläche $\boxed{a : ma : na}$ gegen ihr

$$\alpha) \; \frac{2mn}{m+n}s \; \sin : \cos = m+n : \sqrt{(n-m)^2 + 2m^2n^2}.$$

Senkrecht auf $\frac{2mn}{m+n}s$ steht die von unserer Fläche im Werthe von $\frac{2mn}{m-m}s$ geschnittene Dimension s.

Wählen wir als das Cosinusverhältniss dieses Neigungswinkels die Linie $\frac{2mn}{m+n}s$, so ist die darauf und auf der von a nach $\frac{2mn}{n-m}s$ laufenden Kante (Fig. XL av) unserer Fläche senkrechte Linie der Sinus zu diesem Cosinus. Dieses Perpendikel ist aber das im rechtwinkligen Dreiecke, wo $\frac{2mn}{n-m}s = Cv$ und a die Katheten sind, gefällte Perpendikel (Fig. XL) Cp für die Fläche am'v für die Neigung gegen Cs,

$$\text{also } \sin : \cos = Cp : Cs = \frac{aC \,.\, Cv}{\sqrt{(aC)^2 + (Cv)^2}} : Cs$$

$$= \frac{a \,.\, \frac{2mn}{n-m}s}{\frac{\sqrt{a^2\,(n-m)^2 + 4m^2n^2s^2}}{n-m}} : \frac{2mn}{m+n}s$$

$$= m+n : \sqrt{(n-m)^2 + 2m^2n^2} \text{ wie oben.}$$

β) Gegen $\frac{2m}{m+1}s$ ist $\sin : \cos = m+1 : \sqrt{(m-1)^2+2}$.

Nehmen hier wieder $\frac{2ms}{m+1}$ als Cosinus, so giebt das Verhältniss von Sinus hiezu das Perpendikel auf die Hypotenusa, (die Kante, welche unsere Fläche von $\frac{2m}{m-1}s$ nach ma bildet), im rechtwinkligen Dreiecke, wo $\frac{2m}{m-1}s$ die eine, ma die andere Kathete ist,

$$\text{also } \sin : \cos = \frac{\frac{m \,.\, 2m}{m-1}s}{\frac{\sqrt{(m-1)^2 m^2 + 4m^2s^2}}{m-1}} : \frac{2m}{m+1}s$$

$$m(m+1) : \sqrt{(m-1)^2 m^2 + 2m^2}$$

$$m+1 : \sqrt{(m-1)^2 + 2} \text{ wie oben.}$$

5) Gegen die Dimension t', gegen $\frac{3mn}{mn+m+n}$ t. Senkrecht auf dieser Dimension t' steht unsere Dimension $\frac{2mn}{n-m}$ s. Wir finden daher, wenn wir jetzt t als Cosinusverhältniss wählen, zu ihm als Sinusverhältniss dieselbe Linie wie für die Neigung derselben Fläche gegen $\frac{2mns}{m+n}$, nehmlich ebenfalls das Perpendikel Cp, also

$$\sin : \cos = \frac{a \cdot \frac{2mns}{n-m}}{\frac{\sqrt{(n-m)^2+2m^2n^2}}{n-m}} : \frac{3mn}{mn+m+n} t$$

$$2(mn+m+n)s : \sqrt{3((n-m)^2+2m^2n^2)}.$$

Wir finden für alle übrigen Körper des regulären Systems daraus leicht dieselben Neigungen gegen ihre Dimensionen s' und t', wenn wir statt m oder n 1 oder ∞ setzen, je nachdem es dem Körper zukommt.

3) Neigung der Kanten gegen die Achsen.

Wir haben 3erlei Kanten an den Hexakisoctaëdern; die einen, A, entstehen in den durch 2 Dimensionen a und eine Dimension s gelegten Ebenen, indem sich 2 Flächen aus 2 verschiedenen Octanten, die beide von einem gemeinschaftlichen a nach einem gemeinschaftlichen ma laufen, schneiden. Sie haben also denselben Lauf wie die Leucitoidkanten A. Die Kanten B entstehen dadurch, dass sich 2 Flächen eines Octanten die von a und a· nach dem beiden Flächen gemeinschaftlichen na·· laufen, sich schneiden. Diese Kanten laufen also ebenfalls wie die Leucitoidkanten B, nur mit dem Unterschied, dass jene nach na, während diese nach ma laufen. Die Kanten C entstehen dadurch, dass sich 2, von einem gemeinschaftlichen a aus, nach ma· und na··

und ma·· und na· laufende Flächen schneiden. Ihre Richtung ist also wie die der Kanten C der Pyramidenoctaëder, nur wird hier die Dimension s, nach der die Kante von a aus läuft, in einem andern Verhältniss von den beiden die Kante bildenden Flächen geschnitten.

Wir haben demnach für die

Kante A	Kante B	Kante C
sin : cos	sin : cos	sin : cos
am Leucit. $= ma : a$,	am Leucit. $= \frac{2ms}{m+1} : ma$,	am Pyramidenoct. $= \frac{2ns : a}{n+1}$,
am Hexakisoct. $= ma : a$,	am Hexakisoct. $= \frac{2ms}{m+1} : na$,	am Hexakisoct. $= \frac{2mns}{n+m} a$

Schaffen wir die Nenner weg, und setzen für a, das $= 1$ ist, diesen Werth, so verhalten sich also beim Hexakisoctaëder für die Neigungswinkel

sin : cos

der Kante A $= m : 1$, der Kante B $= 2ms : n(m+1)$, der Kante C $= 2mns : n+m$.

Wir haben für die Kante C das Stück von s, in welchem sie verlängert dasselbe trifft $= \frac{2mn}{n+m}$ s gesetzt. Es ist leicht zu beweisen, dass dieses wirklich der Werth desselben ist. Es sei in Fig. XVI Cn und Cn' $=$ na, Cv und Cm $=$ ma, so läuft die von 1 a, welches senkrecht auf unserm C gedacht wird, ma und na schneidende Fläche offenbar in der durch Cn und Cm gelegten Ebene von n nach m und schneidet die Dimension s in l. Zieht man nun a·a·· von 1 a nach 1 a, so ist diese Linie gleich der Octaëderkante $= 2s$, und nn' parallel aa, so ist nach der Formel

$$N : M = x(a + b) : ya$$
$$Cl : lw = Cm \,.\, nn' : mn' : nw$$
$$= m \,.\, n2s \;{}^{*)} : (n - m)\, ns = 2m : n - m,$$

*) Da Ca·· : Cn $=$ a·a· : nn', so ist, weil Ca $= 1$, Cn $=$ n.a $=$ n, auch nn' $=$ n.a·a·· $=$ n.2s; nw $=$ a ist aber $=$ wn' $=$ b $=$ ns.

$$\text{also } Cl = \frac{2m}{n+m} \text{ von } N + M,\ N + M = n.s$$

$$Cl = \frac{2mn}{n+m} s \text{ wie oben.}$$

4) **Neigungswinkel der Flächen in den Kanten gegen einander.**

1) **In den Kanten A.**

Die Flächen, welche die Kanten A bilden, gehen von a nach ma· und na··; halbiren wir wieder den Kantenwinkel mittelst einer durch a, ma und die Kante gelegte Ebene und wählen als Cosinus wieder das Perpendikel aus dem Mittelpunct· auf die Kante, so ist der Sinus dasjenige Stück des auf ma· rechtwinkligen a, welches von der Fläche abgeschnitten wird, also na··; so haben wir

$$\sin : \cos = na : \frac{a\,.\,ma}{\sqrt{a^2 + ma^2}} = n : \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$
$$= n\sqrt{1+m^2} : m.$$

2) **In den Kanten B.**

Wie schon erwähnt laufen die Kanten B gerade so wie die Kanten B der Leucitoide, mit dem Unterschiede, dass sie den 3ten Parameter nicht in der Entfernung m, sondern in der von n schneiden, also der Cosinus das Perpendikel auf die Kante (als Hypotenusa) wird aus dem Mittelpunct im rechtwinkligen Dreiecke, wo na und $\frac{2ms}{m+1}$ die Katheten sind. Ganz auf dieselbe Weise, wie pag. 44 für die Leucitoidkante B finden wir auch hier das Verhältniss von

$$\sin : \cos = \frac{2ms}{m-1} : \frac{na\,.\,\frac{2ms}{m+1}}{\sqrt{(na)^2 + \left(\frac{2ms}{m+1}\right)^2}} = \sqrt{n^2(m+1)^2 + 2m^2} : n(m-1).$$

3) **In den Kanten C.**

Diese laufen von 1 a nach $\frac{2mn}{m+n}$ s. Auf der Halbirungsebene dieses Kantenwinkels steht senkrecht dasjenige s, welches von der Verlängerung unserer Fläche von $\frac{2mn}{m+n}$ s über ma hinaus geschnitten den Sinus darstellt, wenn wieder das Perpendikel aus dem Mittelpunct auf die Kante der Cosinus ist. Welches ist nun der Werth dieser Sinuslinie? Fig. XIX sei $Cm' = ma$, $Cs' = \frac{2mn}{m+n}s$, Cx unser Sinus, der von unserer verlängerten Fläche von der Dimension s abgeschnitten wird. Zieht man mrm', so ist $Cr = m'r$, $mr = m\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Wir haben dann folgende Proportion $s'r : m'r = s'C : Cx$ d. i.

$$\frac{2mns}{m+n} - ms : ms = \frac{2mns}{m+n} : Cx$$

$$\frac{2n-(m+n)}{m+n} : 1 = \frac{2mns}{m+n} : Cx$$

$$Cx = \frac{2mns}{n-m}.$$

Wir haben also

$$\sin : \cos = \frac{2mn}{n-m}s : \frac{\frac{a \cdot 2mns}{m+n}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{2mns}{m+n}\right)^2}}$$

$$= \frac{2mns}{n-m} : \frac{2mns}{\sqrt{(m+n)^2+(2mns)^2}}$$

$$= \sqrt{(m+n)^2+2m^2n^2} : n-m.$$

5) **Werthe der Kanten.**

1) **Der Kanten A.**

Da die Kante von a nach ma· läuft und mit der, welche von a· nach ma geht, in $\frac{2m}{m+1}$ s zusammenstösst, so hat sie

denselben Werth wie die eines Leucitoides. Wir fanden denselben (§. 22.6.1) $= \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$.

2) Der Kanten B,

die vom kleinsten s, von $\frac{2m}{m+1}$ s nach na laufen. Wir suchen das Stück zwischen s und t, (das zwischen t und na wird von den dieses a in der Einheit schneidenden Flächen ja abgeschnitten).

Es sei Fig. XX, Ca = a = 1, Cs = s = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, Ct die Dimension t, sa die Diagonale des Octaëders = d, die von t' im Verhältniss von 2 : 1 geschnitten wird, so dass st = $\frac{1}{3}$ d und ta = $\frac{2}{3}$ d wird, ferner Cr = $\frac{2m}{m+1}$ s. Cn = na, rn ist dann unsere Kante und rt' das gesuchte bleibende Stück derselben. Zieht man nun rv parallel sa, so haben wir wieder Ca : Cv = Cs : Cr = Ct : Cl = sa : rv = st : rl = ta : lv $= 1 : \frac{2m}{m+1}$. Setzen wir nun die entsprechenden Werthe in der Formel x : y = Na : M (a + b), wofür wir die Linien haben rt' : t'n = rl . Cv : lv . Cn, so wird

$$rt' : t'n = \frac{1}{3} d . \frac{2ms}{m+1} . \frac{2ma}{m+1} : \frac{2}{3} d . \frac{2ms}{m+1} . na$$

$$= \frac{2ma}{m+1} : 2na = m : n(m+1)$$

$$rt' = \frac{m}{n(m+1)+m} \text{ von } N+M$$

$$N+M = \sqrt{\left(\frac{2ms}{m+1}\right)^2 + n^2}, \text{ also}$$

$$B = rt' = \frac{m . \sqrt{2m^2 + n^2(m+1)^2}}{(nm+n+m)(m+1)}.$$

3) Der Kanten C.

Diese Kanten laufen von a über t nach $\frac{2mns}{n+m}$.

In Fig. XXI sei $Ca = a = 1$, $Cs = s = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $as = d$, gleich der Octaëderdiagonale, $Cn = \frac{2mn}{n+m} s$, t unsere Dimension t, so ist an der Lauf unserer Kante und at' das gesuchte bleibende Stück derselben, unsere Kante C. Nach derselben Formel wie bei der Kante B finden wir

$$at' : tn = at\,.\,Cs : ts\,.\,Cn$$
$$= \tfrac{2}{3} ds : \tfrac{1}{3} d\,.\frac{2mn}{n+m} s = n+m : mn$$
$$at' = \frac{n+m}{mn+n+m} \text{ von } an, \text{ i. e. } \sqrt{1+\left(\frac{2mns}{n+m}\right)^2}$$
$$C = at' = \frac{\sqrt{(n+m)^2+2m^2n^2}}{mn+n+m}.$$

Können 2 der 3 Kanten einander je gleich werden, können also die Dreiecke der Hexakisoctaëder gleichschenklige Dreiecke werden? Setzen wir die Formeln zweier verschiedener Kanten einander gleich, und suchen wir daraus den Werth für m und n zu entwickeln, so sehen wir bald, dass dieses nie der Fall sein kann, wenn m und n > 1 und rationelle Zahlen bedeuten.

Setzt man z. B. die Werthe für C und B einander gleich, so kommt man auf folgende Gleichung:

$$\overset{C}{\frac{\sqrt{(n+m)^2+2m^2n^2}}{mn+m+n}} = \overset{B}{\frac{m\sqrt{2m^2+n^2(m+1)^2}}{(mn+m+n)m+1}}$$
$$(m+1)\sqrt{(n+m)^2+2m^2n^2} = m\sqrt{2m^2+n^2(m+1)^2}$$
$$(m+1)\sqrt{(2mn^2+2n+m)m+n^2} = m\sqrt{(mn+2m)m+n^2}.$$

Man sieht schon hieraus, dass die supponirte Gleichheit der beiden Kanten unmöglich Statt finden könne, indem die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse der linken Seite C grösser ist als die der rechten, da $2mn^2+2n+m > mn+2m$, und als Factor vor dem Wurzelzeichen steht vor

der grösseren von beiden eingeklammerten Grössen m + 1, während die andere nur m als Factor hat.

Sollte A und B einander gleich sein, so müsste sein

$$\frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1} = \frac{m\sqrt{2\,m^2+n^2\,(m+1)^2}}{(m\,n+n+m)\,(m+1)},\ \text{dies giebt:}$$

$$\sqrt{(m\,n+n+m)^2\,(m^2+1)} = \sqrt{m^2\,(2\,m^2+n^2\,(m+1)^2},$$

$$\sqrt{(m^2\,n^2+2\,m^2\,n+2\,m\,n^2+2\,m\,n+n^2+m^2)\,(m^2+1)}$$

$$= \sqrt{(m^2\,n^2+2\,m\,n^2+2\,m^2+n^2)\,m^2}$$

$$(m^2\,n^2+2\,m\,n^2+n^2)\,(m^2+1)\,(2\,m^2\,n+2\,m\,n+m^2)$$

$$=(m^2\,n^2+2\,m\,n^2+n^2)\,m^2\,2\,m^2),\ (m^2+1)\,(2\,m^2\,n+2\,m\,n+m^2)$$

$$= m^2 . 2\,m^2.$$

Man sieht also auch hier, dass A und B einander nie gleich werden können.

Sollte A und C gleich werden, so müsste gelten

$$\frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1} = \frac{\sqrt{(n+m)^2+2\,m^2\,n^2}}{m\,n+n+m}\ \text{und da}\ m\,n+n+m = (m+1)\,n+m$$

$$(n+m)\sqrt{m^2+1} = \sqrt{(n+m)^2+2\,m^2\,n^2}$$

$$\sqrt{(n+m)^2 . (m^2+1)} = \sqrt{(n+m)^2+2\,m^2\,n^2}$$

$$\sqrt{(n+m)^2+m^2\,(n+m)^2} = \sqrt{(n+m)^2+2\,m^2\,n^2}.$$

Es müsste also sein $m^2\,(n+m)^2 = 2\,m^2\,n^2$, was unter unserer Voraussetzung, dass $n > m > 1$ ist, unmöglich sein kann. Es kann also nie eine Kante der andern gleich werden. Wir sahen (§. 25.3), dass die 3erlei Kanten A, B, C der Hexakisoctaëder den Kanten der Leucitoide A und B *) und den Kanten der Pyramidenoctaëder C entsprechen, dass sie ganz dieselben Werthe wie die an den erwähnten Körpern haben können und auch ganz dieselben Werthe für sin : cos in Beziehung auf ihre Neigung gegen die Achse, dass also in jedem Hexakisoctaëder durch die verschiedenen Kanten desselben einer dieser beiden Körper beschrieben werde.

---

*) Die Kanten A und B gehören an einem Hexakisoctaëder natürlich stets 2 verschiedenen Leucitoiden an.

Ebenso sind aber auch die Pyramidenwürfel und die Granatoëderkanten in gewissen Hexakisoctaëdern ganz mit demselben Werthe und mit derselben Neigung gegen die Achse wie diese enthalten. Es lässt sich leicht berechnen, welche Werthe für ein gewisses Hexakisoctaëder dem Pyramidenwürfel zukommen müsse, dessen Kanten mit den Kanten C des Hexakisoctaëders zusammenfallen sollen, und umgekehrt, welche Hexakisoctaëder es sein können, deren Kanten C gleichwerthig sind mit denen eines bestimmten Pyramidenwürfels. Es müssen dann offenbar die Verhältnisse für die beiden Kanten einander gleich sein, also für den Pyramidenwürfel und die Kante C des Hexakisoctaëders

$$2 m' s : 1 = \frac{2 m n s}{m + n} : 1$$

Accentuiren wir zur Unterscheidung das m' des Pyramidenwürfels, so erhalten wir $m' = \frac{m n}{m + n}$ und $m' (m + n) = m n$; bei dem gewöhnlichen Pyramidenwürfel ist $m' = 2$, wir erhalten dann $2 m + 2 n = m n$. Es ergiebt sich daraus, dass dann m eines Hexakisoctaëders, dessen Kanten C gleich denen des Pyramidenwürfels sein sollen, stets grösser als 2 und überhaupt grösser als m' sein muss, indem im Falle der Gleichheit $m' (m + n) = m n$ sich in $m^2 + m n = m n$ verwandeln würde, was unmöglich ist, und, wenn es 2 sein sollte, aus obiger Gleichung sich ergäbe $4 + 2 n = 2 n$, was unmöglich ist. Nehmen wir $m = \frac{7}{3}$, so finden wir $n = 14$. Es wäre also dies das Hexakisoctaëder $\boxed{a : \frac{7}{3} a : 14 a}$, das freilich in der Natur noch nicht beobachtet worden ist.

Dem Pyramidenwürfel, dessen $m' = 3$ ist, entspräche das Hexakisoctaëder $\boxed{a : 4 a : 12 a}$, das ebenfalls nicht in der Natur vorkommt.

Dem Pyramidenwürfel, dessen $m' = \frac{4}{3}$, entspricht dann das Hexakisoctaëder $\boxed{a : 2 a : 4 a}$, was wirklich in der Natur

vorkommt und an dem erwähnten Pyramidenwürfel als Zuschärfung seiner Kanten erscheint. Umgekehrt können wir den Pyramidenwürfel leicht finden, der durch die Kanten C eines bestimmten Hexakisoctaëders gebildet wird. Für das Hexakisoctaëder $\left[a : \frac{5}{3}a : 5a\right]$ wird $m' = \frac{5}{4}$, was auch noch nicht sicher beobachtet worden ist. Wird $m \cdot n = m + n$, so wird $m' = 1$, der Pyramidenwürfel verwandelt sich also in ein Granatoëder, da ja $\left[a : ma : \infty a\right]$ das Zeichen des Pyramidenwürfels, wenn $m = 1$ wird, sich in $\left[a : a : \infty a\right]$, also das Granatoëder, verwandelt. Wir sehen daraus, dass also die Kanten C mancher Hexakisoctaëder den Granatoëderkanten entsprechen. Z B. das Hexakisoctaëder $\left[a : \frac{4}{3}a : 4a\right]$ $\left[a : \frac{3}{2}a : 3a\right]$ geben beide $m' = 1$, indem $\frac{4 \cdot \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 1$, ebenso $\frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{3 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$ wird.

Wir finden dies ebenso direct, wenn wir das Verhältniss, das wir für die Granatoëderkante fanden, dem für die Kante C des Hexakisoctaëders gleich setzen, dann muss sein

$$2s : 1 = \frac{2mns : 1}{m + n}, \text{ also}$$

$$1 = \frac{mn}{m + n} \text{ wie oben.}$$

Welche Hexakisoctaëder zeigen diese Eigenschaft, dass ihre Kanten C gleich sind denen des Granatoëders? In welchem Verhältnisse muss ihr n und m zu einander stehen? Wir finden dafür, dass es alle diejenigen sind, deren $m = \frac{n}{n-1}$ sind, also alle die, deren m ein unächter Bruch wird, wenn n eine ganze Zahl ist, und umgekehrt, oder deren $n = \frac{m}{m-1}$

wird. Suchen wir nehmlich aus der Gleichung $1 = \frac{m\,n}{m + n}$ m und n zu entwickeln, so erhalten wir

$$m + n = m\,n \qquad m + n = m\,n$$
$$m = (m - 1)\,n \qquad n = (n - 1)\,m$$
$$\frac{m}{m - 1} = n \qquad \frac{n}{n - 1} = m.$$

Hat n die Werthe 3, 4, 5, 7, 8, so wird $m = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}$, die beiden ersteren kommen wirklich in der Natur vor, die übrigen sind bis jetzt nicht beobachtet worden. Wir haben zunächst nur die Neigungsverhältnisse der Kanten im Auge gehabt; es ergiebt sich aber aus der Gleichheit der Neigungen gegen die Achse a, dass auch die Länge derselben, also ihr Werth auch bei beiden Körpern gleich sein muss. Die Kante C läuft nehmlich von a nach $\frac{2\,m\,n\,s}{m + n}$; wird nun diese Grösse $= 2\,s$, läuft sie also wie die Granatoëderkante, so lässt sich leicht beweisen, dass dann das als Kante bleibende Stück, das bei beiden Körpern zwischen a und der Dimension t liegt, gleich sein muss, wie dies auch die directe Berechnung der Kante ergiebt. Wir hatten pag. 71 und Fig. XXI gefunden, dass a t′ unsere Kante sich verhalte zu t a, dem aus der Begränzung wegfallenden Stücke derselben, das nach $\frac{2\,m\,n\,s}{m + n}$ läuft $= \frac{2}{3}\,d\,s : \frac{1}{3}\,d \,.\, \frac{2\,m\,n\,s}{m + n}$; wird nun $\frac{2\,m\,n\,s}{m + n} = 2\,s$, so erhalten wir $\frac{2}{3}\,d\,s : \frac{1}{3}\,d \,.\, 2\,s = 1 : 1$ d. h. also das bleibende Stück ist die Hälfte des ganzen, das ganze ist aber in diesem Falle $= \sqrt{2\,s^2 + 1} = \sqrt{3}$ unsere Kante also $= \sqrt{\frac{3}{2}}$, was wir auch als den Werth der Granatoëderkante gefunden hatten (§. 20. 6). Ebenso lässt es sich auch für die Pyramidenwürfelkante nachweisen, dass sie $=$ unserer Kante C sei, wenn beide gleiche Neigung gegen die Achse a haben.

6) Ebene Winkel der Hexakisoctaëder.

Für das Hexakisoctaëder findet man dieselben noch am einfachsten (nach C III und V) aus den 3 bekannten Seiten seiner Dreiecke. Nennen wir nehmlich den der Seite A gegenüberliegenden Winkel a, den der Seite B gegenüberliegenden b, den C gegenüberliegenden c, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{(a+b-c).(a+c-b)}}{4bc} \qquad \cos.a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc.}$$

Man erhält daraus endlich

für Winkel a $\sin : \cos = (mn+n+m)\sqrt{n^2(m^2+1)+m^2} : m(m(n^2-n+1)+n(n+1))$

für Winkel b $\sin : \cos = m\sqrt{n^2(m^2+1)+m^2} : n(m^2+1)+m$

für Winkel c $\sin : \cos = m+1(\sqrt{n^2(m^2+1)+m^2} : m(m-1)$.

7) Gränzen und beobachtete Werthe der Hexakisoctaëder.

Die Hexakisoctaëder sind die alle übrigen Körper des regulären Systems gewissermassen in sich vereinigenden Gestalten. Sie erscheinen als Octaëder, auf deren Flächen 6seitige, als Granatoëder, auf deren Flächen 4seitige, als Würfel, auf deren Flächen 8seitige Pyramiden aufgesetzt sind. Denken wir uns durch eine von innen herauswirkende Gewalt die Leucitoidflächen längs ihrer Längendiagonale, die Pyramiden-Würfel- und Octaëderflächen längs der Höhenlinie ihrer gleichschenkligen Dreiecke geknickt oder „gebrochen“, so würden sie dadurch als Hexakisoctaëder erscheinen. Je nach den verschiedenen Werthen von m und n nähert sich das Hexakisoctaëder bald dem einen, bald dem andern Körper.

Wird $m = n$, so entsteht daraus das Leucitoëder.

Wird m oder $n = \infty$, so entsteht daraus der Pyramidenwürfel.

Wird m oder $n = 1$, so entsteht daraus das Pyramidenoctaëder.

Wird m oder $n = 1$, und dabei n oder $m = \infty$, so entsteht daraus das Granatoëder.

Wird m und n $= \infty$, so entsteht daraus der Würfel.
Wird m und n $= 1$, so entsteht daraus das Octaëder.

Je nachdem sich nun m oder n den angegebenen Bedingungen mehr oder weniger nähert, wird ein Hexakisoctaëder mehr oder weniger einem der 6 übrigen Körper ähnlich werden.

Setzen wir in die für das Hexakisoctaëder gefundenen Formeln, irgend einer der obigen 6 Bedingungen entsprechend, für m oder n die darnach veränderten Werthe, so bekommen wir daraus augenblicklich auch dieselben Formeln, wie wir sie bei dem Körper, in welchen sich dann das Hexakisoctaëder verwandelt, gefunden haben.

Die bis jetzt beobachteten Werthe für m und n sind:

m $\frac{15}{11}$ (?), $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{5}$, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 4, $\frac{64}{63}$ (?)
n $\frac{15}{7}$ (?), 3, 4, $\frac{11}{3}$, 4, 5, 7, 8, 64 (?).

Hemiedrische Formen des regulären Systems.

§. 26. Wir haben pag. 14 schon erwähnt, was unter Hemiedrie überhaupt zu verstehen sei, nehmlich die Erscheinung, dass nicht alle gleichartigen Flächen eines einfachen oder zusammengesetzten Körpers, welche für ein gewisses Parameterverhältniss möglich sind, an einem Krystalle ausgebildet sind, sondern dass nur die eine Hälfte derselben die symmetrische Begränzung des Körpers ausmacht, während die andere vollkommen oder theilweise verschwunden ist. Dieses Verschwinden nun der Hälfte der Flächen findet nach ganz bestimmten Gesetzen Statt. Es können nehmlich sowohl einzelne Flächen, oder Paare von Flächen oder selbst ganze Flächensysteme aus der Begränzung verschwinden, nur müssen die verschwindenden

sowohl, wie die bleibenden, alle eine ringsum symmetrische Vertheilung haben und alle sich in gleicher Lage gegen den Mittelpunct befinden. Es verschwinden und bleiben also stets die abwechselnden Flächen, Flächenpaare oder Flächensysteme. Für ein wachsendes Glied oder Flächensystem verschwinden alle benachbarten und um ein verschwindendes wachsen alle benachbarten.

In Beziehung auf die Form des hemiedrischen Körpers bemerken wir eine grosse Verschiedenheit, je nachdem nehmlich an demselben parallele Flächen vorhanden sind oder nicht. Jeder einfache Körper hat nehmlich, da sich beim gewöhnlichen homoedrischen Verhalten die beiden Enden der Achsen vollkommen gleich verhalten, für jede Fläche eine parallele. Ist nun die Vertheilung derselben so, dass, wenn wir von einer Fläche oder Flächensysteme ausgehend, immer die abwechselnden verschwinden und bleiben lassen, die parallele Fläche eine bleibende wird, so werden wir also einen Körper bekommen, der wie ein homoedrischer noch parallele Flächen besitzt; trifft es sich aber, dass die parallele Fläche nach demselben Gesetze der Hemiedrie eine verschwindende wird, so erhalten wir einen Körper, der keine parallelen Flächen mehr besitzt. Dieser für das Auge so auffallende Unterschied lässt uns die hemiedrischen Gestalten leicht in 2 Abtheilungen bringen. Die erste umfasst die parallele Flächen zeigenden Körper, „die parallelflächig hemiedrischen", letztere sind „die geneigtflächig hemiedrischen."

§. 27. Es können an einem und demselben Körper beide Arten von Hemiedrie vorkommen, also aus einem homoedrischen ein hemiedrischer mit parallelen Flächen oder ein geneigtflächig hemiedrischer entstehen, wenn seine Flächen von der Art und in einer solchen Anzahl vorhanden sind, dass beides möglich wird. Natürlich muss dann aber das Verschwinden und Wachsen von der Hälfte der Flächen ver-

schieden sein; das einemal werden nach einer bestimmten Art der Combination einzelne Flächen oder Flächenpaare abwechselnd wachsen und verschwinden, während in dem andern Falle die Reduction auf die Hälfte der Flächen nach andern Combinationsgesetzen eintritt. *) Diese doppelte Art der Hemiedrie an einem Körper kommt auch wirklich bei dem Hexakisoctaëdër vor, indem einmal sämmtliche 6 innerhalb eines Raumoctanten sich befindliche Flächen schwinden, während die der benachbarten Octanten alle wachsen, das anderemal je 2 an einer Kante A zusammenstossende Flächen abwechselnd wachsen und schwinden. Suchen wir uns zu erklären, auf welches physikalische Verhalten dieses verschiedene Verhalten hinführe, so können wir dasselbe etwa so ausdrücken. Das einemal, bei der geneigtflächigen Hemiedrie, verhält sich die Masse des Krystalles vollkommen gleich in abwechselnden ganzen Raumoctanten; befindet sich der eine in einem Zustande, der die übermässige Ausdehnung von Flächen hervorruft, so befindet sich der andere im Gegentheil in einem Zustande, der die Flächenbildung nicht begünstigt. Die parallelflächige Hemiedrie führt uns aber auf ein ganz anderes Verhalten hin. Denken wir uns nehmlich Flächen durch je eine Dimension a, 2 Dimensionen t und 2 Dimensionen s gelegt, also durch je 4 Octaëderflächen-Diagonalen, so wird uns dadurch der Raum in 24 gleiche 3seitige im Mittelpunct zusammenstossende Pyramiden — Sesquiquadranten — getheilt; diese einzelnen Pyramiden nun sind es, die sich hier ganz auf dieselbe Weise abwechselnd verhalten, wie bei der ersten Art die ganzen Octanten. Beide Arten von Hemiedrie erscheinen daher an einem und demselben Krystalle nie zusammen, eine schliesst die andere aus. Bei einem parallelflächig hemiëdrischen Körper kommen daher alle die

*) Geometrisch sind daher auch noch andere Möglichkeiten denkbar, aber nur diese 2 verschiedenen im regulären Systeme wirklich beobachtet.

Flächen, die nur innerhalb eines Raumoctanten liegen, nicht wie die Pyramidenwürfelflächen z. B. und jede der erwähnten 24 Pyramiden 2 Raumoctanten zugleich angehören, wenn sie an ihm erscheinen, alle in ihrer vollen Anzahl vor. So erscheinen am Schwefelkiesdodecaëder, dem parallelflächigen Hälftflächner des Pyramidenwürfels die Octaëderflächen, wenn sie erscheinen, und ebenso die Leucitoidflächen vollzählig.

Es ist aber kein Körper ausser dem Hexakisoctaëder vorhanden, dessen Flächen sich so gruppiren, dass sie nicht nur zu einem Octanten angehörig betrachtet werden können, sondern auch je 2 an einer Kante A liegende einer unserer 24 Pyramiden entsprechend erscheinen. Daher verschwinden auch bei ihm entweder je 6 Flächen eines Octanten oder immer je 2 an den abwechselnden Kanten A.

Da jeder Körper des regulären Systems aus 2 gleichen Hälften besteht, so können wir aus jedem 2 gleiche Hälftflächner uns entstehen denken, wovon der eine aus denjenigen vergrösserten Flächen besteht, die an dem andern verschwinden. Man hat diese beiden Körper als rechten und linken Hälftflächner unterschieden. Da sie aber einander völlig gleich sind, und wenn sie für sich vorkommen, nicht erkennen lassen, welche Hälfte verschwunden, welche geblieben sei, ob die dem Beschauer des einfachen Körpers zur rechten oder zur linken gelegene Hälfte, so ist es ganz willkührlich, welchen man als rechten, welchen als linken bezeichnen will; den einen nennt man auch den Gegenkörper des andern.

Die vollzähligen Gestalten zeigen alle — wie schon erwähnt — parallele Flächen, überhaupt ganz gleiche Begränzungselemente an allen Enden. Dies Kennzeichen lässt uns daher im Augenblicke erkennen, ob ein bestimmter Körper hemiedrisch oder homoedrisch sei. Die geneigtflächigen geben sich sogleich durch den Mangel paralleler Flächen als hemiedrisch zu erkennen; aber auch bei den parallelflächig hemi-

edrischen werden wir nicht lange in Zweifel sein. Halten wir dieselben nehmlich so, dass eine Achse senkrecht steht, die eine der beiden andern, in diesem Falle in einer horizontalen Ebene sich befindenden, aber gerade gegen uns gekehrt ist, so werden wir, wenn wir nun den Körper um seine vertikale Achse um 90° drehen, so dass die zweite horizontale Achse gegen uns gekehrt ist, stets wahrnehmen, dass die an derselben liegenden Begränzungselemente eine andere Lage gegen dieselbe und gegen den Beschauer haben, als diejenigen an der erst betrachteten. Fig. 46 und 47 stellen diese Verschiedenheit des Dyakisdodekaëders in 2 von einander um 90° verschiedenen Richtungen vor. Auf diese Weise können wir auch bei den zusammengesetztesten parallelflächig hemiedrischen Körpern stets mit Leichtigkeit ihre Natur erkennen.

Welche Körper des regulären Systems sind der Hemiedrie fähig?

Wir haben schon erwähnt, dass nur auf 2erlei Weise überhaupt Hemiedrie entstehe und dass sie auf dem verschiedenen Verhalten der Masse in abwechselnden Octanten oder in abwechselnden Pyramiden — Sesquiquadranten —, die zu 24 den Raum um den Mittelpunct begränzen, beruhe, dass demnach nur solche Körper hemiedrisch werden können, deren Flächen so vertheilt sind und eine solche Lage haben, dass die Gränzen einer oder mehrerer Paare derselben mit den Gränzen je eines Raumoctanten oder mit den Gränzen je einer dieser Pyramiden zusammenfalle. Im ersten Falle fällt ein Körper der geneigtflächigen, im 2ten der parallelflächigen Hemiedrie anheim. Eine Fläche, die mehreren Octanten und zugleich mehreren Pyramiden angehört, kann daher weder der einen noch der andern Hemiedrie anheimfallen, es müssten in diesem Falle die Hälfte einer Fläche verschwinden und die andere Hälfte derselben Fläche wachsen, wenn der Körper nach einer der beiden Arten hemiedrisch werden sollte.

Von den einfachen Körpern des regulären Systems ist aber der Würfel und das Granatoëder von der Art, dass eine Fläche derselben zugleich verschiedenen Octanten und verschiedenen Sesquiquadranten angehöre. Alle übrigen fallen in ihren Gränzen mit den Gränzen eines Octanten oder eines Sesquiquadranten zusammen. Der Würfel und das Granatoëder sind daher die einzigen Körper des regulären Systems, die der Hemiedrie nicht fähig sind, während die Hexakisoctaëder die einzigen sind, welche mit doppelter Art hemiedrisch werden können, indem sie allein eine solche Lage der Flächen zeigen, dass je 6 derselben innerhalb der Gränzen eines Octanten, je 2 innerhalb der Gränzen eines Sesquiquadranten fallen.

Wir haben daher folgende hemiedrische Gestalten

I. geneigtflächige:

1) das $\frac{1}{2}$ Octaëder oder Tetraëder,
2) das $\frac{1}{2}$ Leucitoid oder Pyramidentetraëder,
3) das $\frac{1}{2}$ Pyramidenoctaëder oder Trapezoiddodecaëder,
4) das $\frac{1}{2}$ Hexakisoctaëder oder Hemihexakisoctaëder,

II. parallelflächige

1) die $\frac{1}{2}$ Pyramidenwürfel oder Pentagondodecaëder,
2) die $\frac{1}{2}$ Hexakisoctaëder oder Dyakisdodecaëder.

A. Geneigtflächige hemiedrische Körper.

§. 28. Bei allen hemiedrischen Gestalten bleiben die 3 Grunddimensionen unverändert in demselben Grössenverhältnisse, wie bei den entsprechenden vollzähligen Gestalten, indem ja von den 4 um jede Achse liegenden Octanten die Flächen aus 2 einander gegenüberliegenden, in einem Eck zusammenstossenden, wachsen, wodurch ein Wachsthum einer Fläche über dieselbe hinaus unmöglich ist. Es wird daher der durch je 2 in einer Ebene liegende Achsen gelegte Durchschnitt — der Hauptschnitt — dieselbe Form behalten, wie bei der homoedrischen Gestalt, indem ja bei der Ausdehnung

der Flächen eines Octanten in dieser Ebene, der Gränzebene zwischen verschiedenen Octanten, weder neue Kanten noch Ecken entstehen können, da dergleichen ja nur entstehen, wo sich 2 oder mehrere Flächen schneiden. Fallen aber die Flächen des benachbarten Octanten ganz weg, so können sich keine Kanten oder Ecken auf der Gränze zwischen dem Octanten, dessen Flächen sich vergrössern und zwischen dem, dessen Flächen verschwinden, bilden. Im Gegentheil werden alle diese Begränzungselemente verschwinden müssen, die ihren Ursprung ja nur dem Zusammentreffen der Flächen der Octanten verdanken, von denen die einen jetzt verschwinden. Statt ihrer werden wir daher nur die Fortsetzung der wachsenden Flächen antreffen, und innerhalb des Octanten, dessen Flächen schwinden, werden neue Kanten und neue Ecken entstehen, die ihren Ursprung dem Zusammentreffen der wachsenden Flächen aus den 3 Octanten verdanken, die denjenigen umgeben, dessen Flächen verschwinden.

Nächst den 3 Grunddimensionen a, ist es aber noch die Hälfte der 8 Dimensionen t, die unverändert dieselbe Grösse in den hemiedrischen und den homoedrischen Gestalten behält, nehmlich die 4, welche den Octanten, deren Flächen wachsen, angehören, von den übrigen 4 werden durch die über sie hin wachsenden Flächen andere Stücke abgeschnitten, als von den andern.

Da unsere Dimensionen s auf den Octaëderkanten senkrecht stehen, mit andern Worten immer in die Gränzebene zwischen 2 Raumoctanten fallen, diese Gränze aber nach den Gesetzen der geneigtflächigen Hemiedrie dadurch verwischt wird, dass sich die Flächen des einen Octanten über diese ihre Gränzen am homoedrischen Körper hinaus erstrecken, so verlieren auch die Dimensionen s an ihrer Wichtigkeit für die Begränzung der Körper; vor allem können sich nie mehr Ecken an ihnen bilden, sie fallen von nun an in die Flächen der Körper, wenn sie beim homoedrischen Körper

durch Kanten gingen, oder in Kanten, wenn der homoedrische Körper in ihnen ein Eck gebildet hatte. Ihre Werthe bleiben aber ganz dieselben, wie die ihres homoedrischen Körpers, da sich über ihnen weder neue Ecken, noch neue Kanten bilden können, sondern an jedem s die Hälfte aller um dasselbe liegenden Begränzungselemente stets über dasselbe sich einfach hinaus verlängert, weil jedes s ja 2 Raumoctanten zugleich angehört, also stets einem, dessen Elemente wachsen und einem, in dem sie schwinden.

Der Hauptdurchschnitt, wie wir sahen, bleibt gleich bei den homoedrischen und hemiedrischen Gestalten, da derselbe ja durch 2 Dimensionen a und s geht, welche beide ebenfalls unverändert bleiben. Wie verhält sich nun der zweite Schnitt, der durch eine Achse, 4 t und 2 s geht? Dieser Schnitt geht durch die Mitte von 4 Octanten; er wird also durch 2 gehen, deren Flächen schwinden und durch 2, deren Flächen wachsen. In den Octanten, deren Flächen wachsen, ist, wie wir sahen, auch die Dimension t gleich der des homoedrischen Körpers. Aus der Gleichheit also der drei Dimensionen a, s und t sowohl, wie daraus, dass in einem seiner Flächen ausbreitenden Octanten die Flächen selbst innerhalb desselben sich gleich bleiben und nur in die benachbarten Octanten hineinwachsen, geht hervor, dass dieser 2te Schnitt innerhalb der Octanten, deren Flächen wachsen, gleich sein muss dem des homoedrischen Körpers und nur innerhalb der Octanten, deren Flächen geschwunden sind, durch die hereinragenden Flächen der benachbarten Octanten eine Veränderung erleidet. Da aber das Wachsen in der Art eintritt, dass nicht die parallelen, sondern die an einer Achse sich gegenüberliegenden Octanten ihre Flächen ausdehnen, so wird also die eine ganze Hälfte des Körpers den gleichen Durchschnitt zeigen, wie dieselbe des homoedrischen Körpers, bei jeder Hauptstellung des Körpers entweder die obere oder die untere Hälfte.

Die Form dieser Durchschnitte betrachten wir am besten für sich bei den betreffenden Körpern selbst.

§. 29. Das **Tetraëder** oder Hemioctaëder $\frac{1}{2}$ [a : a : a] r und l (Taf. IV, Fig. 26 und 27) + und — $\frac{O}{2}$ (**Naumann**).

Es ist von 4 gleichseitigen Dreiecken begränzt, hat 6 Kanten und 4 reguläre 3kantige Achsen. Die Achsen verbinden die Mitten der gegenüberliegenden Kanten, die Endpuncte der Dimensionen s fallen in die Mitten der Diagonalen der Flächen, die Dimensionen t gehen von den Mitten der Flächen nach den senkrecht über den Flächen sich befindenden Ecken.

Die Neigungswinkel der Flächen bleiben unverändert. Die Kanten stehen rechtwinklig auf den Grunddimensionen und da Kanten dadurch entstehen, dass je 2 an einer Dimension a sich gegenüberliegende Flächen sich vergrössern, sich statt in einem Puncte in einer Linie schneiden, so haben die Kanten denselben Winkel wie die Flächen des Octaëders gegen die Achse sin : cos $= \sqrt{\frac{1}{2}} : 1$.

1) **Werth der Dimension t und** 2) **der Kante t′t′** (Fig. XXII).

Vier derselben, welche vom Mittelpuncte nach den Mitten der wachsenden Flächen gehen, bleiben unverändert, die andern wachsen. Fig. (XXII) stellt den Durchschnitt des Tetraëders durch die Diagonale des Octaëders a, s und t vor, und zwar hier wie in den folgenden Figuren seien die unteren Linien a′s die Diagonalen der wachsenden Flächen. Diese verlängern sich in der Richtung der Linien a s, bis sie die Dimension t in t′ und t′ schneiden. Wir finden nun, dass

1) die beiden obern an a wachsenden Flächen die Dimension t in t′ und t′ schneiden und
2) auch die wachsenden untern Flächen an a′ dieselbe Dimension t in demselben Puncte schneiden, dass also an diesem Puncte eine neue dreikantige Ecke entsteht,
3) zugleich den Werth der Tetraëderkante t′t′.

Die beiden wachsenden Flächen bilden mit einander eine Kante, die von 1 a nach dem Punct der Dimension s laufen muss, in welchem sich die beiden wachsenden Flächen in der Verlängerung schneiden. Da diese beiden Flächen aber parallel dem zwischen ihnen liegenden s laufen, so muss also auch die neue Kante parallel s gehen, d. h. mit demselben nicht zum Durchschnitt kommen, wohl aber mit der verlängerten Dimension t, die sie (Fig. XXII) in t' schneidet. Ziehen wir von 1 a nach 1 s die Linie as, d. h. die Octaëderdiagonale, auf der Ct senkrecht ist, so haben wir, da at parallel Cs d. h. rechtwinklig auf Ca, die Proportionen

1) $Ct : Ca = Ca : Ct'$, setzen wir hiefür die Zahlenwerthe, so erhalten wir $Ct' = \frac{(Ca)^2}{Ct} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3}$

2) $Ct : ta = Ca : at'$

$$\frac{ta . Ca}{Ct} = at' = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{2}.$$

Die ganze Kante des Tetraëders also $= 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, also gleich der Würfeldiagonale, während $Ct' = \sqrt{3}$ gleich der Dimension t des Würfels ist.

Ebenso finden wir aber auch, da at' parallel Cs

3) $a'C : Cs = a'a : at'$

$$\frac{Cs . a'a}{a'C} = at' = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} . 2}{1} \sqrt{2} \text{ wie oben unter 2.}$$

Es wird also die Kante at't' von der Dimension t in demselben Puncte geschnitten, wie von der Verlängerung der untern wachsenden Fläche. Es entsteht also an diesem Puncte ein dreiflächiges reguläres Eck.

3) Ebene Winkel des Tetraëders.

Aus den 3 vorigen Proportionen folgt aber auch

4) $a's : a't' = Cs : at'$

$$a't' = \frac{a's . at'}{Cs} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} . \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{6} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

a t′, die Diagonale der Tetraëderfläche ist also gleich der doppelten Octaëderdiagonale. Für den ebenen Winkel des Dreieckes des Tetraëders haben wir sin : cos = die Diagonale : halben Kante = $2\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{2} = \sqrt{3} : 1$. Der Winkel ist also $= 60^0$, die Fläche des Tetraëders ist ein gleichseitiges Dreieck, wie die Fläche des Octaëders und zwar, da sich bei ähnlichen Figuren die Flächeninhalte verhalten wie die Quadrate der entsprechenden Seiten, verhält sich der Inhalt der Tetraëderfläche zu dem seiner Octaëderfläche = 8 : 2. Sie ist also 4 mal so gross. Da in jedem gleichseitigen Dreiecke die Verbindungslinie der Mittelpuncte der Seiten dasselbe in 4 gleiche ebenfalls gleichseitige Dreiecke theilen, so erhalten wir in einem Tetraëder sein entsprechendes Octaëder eingezeichnet, wenn wir die Mittelpuncte seiner Kanten mit einander durch gerade Linien verbinden. Stumpft man daher am Tetraëder die Ecken bis zur Mitte der Kanten ab, so erhält man daraus das Octaëder.

Die Kante des Tetraëders und seine zu den Ecken verlaufenden Dimensionen t′ sind gleich denen des Würfels. Das Tetraëder wird daher am Würfel eingezeichnet, wenn man die 3 Diagonalen der 3 an einem Ecke zusammenstossenden Flächen von 4 abwechselnden Ecken desselben auszieht. Es erscheint das Tetraëder am Würfel als Abstumpfung von 4 abwechselnden Ecken (Tafel IV, Fig. 30), wie das Octaëder als Abstumpfung seiner 8 Ecken erscheint.

§. 30. Pyramidentetraëder . r und l $\frac{1}{2}$ [a : ma : ma] Trigondodecaëder + und — $\frac{mOm}{2}$ (Naumann). — Trigonaldodecaëder (Mohs).

Sie sind von 12 gleichschenkligen Dreiecken begränzt, und entstehen durch abwechselndes Schwinden und Wachsen von je 3 Leucitoidflächen eines Octanten. Sie haben 12 Kanten B′, die verlängerten zu 3 um eine Ecke liegenden Leucitoid-

kanten B, und 6 neue Kanten A'; die 4 bleibenden 3kantigen Ecken des entsprechenden Leucitoides und 4 neue symmetrische 3 und 3kantige. Die Dimensionen a endigen in den Mitten der neuen Kanten, die Dimensionen t gehen von einem 3 und 3kantigen Eck zu dem entgegengesetzten 3kantigen, die Dimensionen s endigen in den wachsenden Kanten des Leucitoides.

1) Berechnung der Dimensionen t und 2) der neuen Kanten A'.

Es sei (Fig. XXIII) der Durchschnitt eines Leucitoides $\boxed{a : ma : ma}$ durch a, t und s, die untere Hälfte desselben, als die durch die wachsenden Flächen gehende, ist aus den pag. 84 angeführten Gründen gleich dem des Leucitoides selbst, die Buchstaben bezeichnen dieselben Grössen wie in Fig. XXII. Es ist a't = der Längendiagonale der Fläche des Leucitoides, ts' gleich der Kante B des Leucitoides. Die beiden Flächen, welche die Kante B = ts' bilden, verlängern sich nun in den obern benachbarten Octanten hinaus, also setzt sich die Kante B ebenfalls in denselben fort; da diese Kante, wie wir wissen, in der Ebene verläuft, welche durch a, s und t gelegt wird, so wird sie also auch die Dimension Ct', welche in dieselbe Ebene fällt, in irgend einem Puncte schneiden. Die beiden am oberen Ende wachsende Flächen habenden Octanten, zunächst die beiden von 1 a nach ma· und ma·· verlaufenden Flächen werden, da sie ebenfalls wie die Octaëderflächen parallel s, unserm Cs' (Fig. XXIII) laufen, eine Kante parallel s bilden, die ebenfalls die verlängerte Dimension t' in irgend einem Puncte schneiden wird.

Ganz auf dieselbe Weise wie pag. 86 für das Tetraëder finden wir, da hier ebenfalls

1) Ct : Ca = Ca : Ct' dieselben Werthe hat, wie oben
$Ct' = \sqrt{3}$ und ebenso

2) $Ct : ta = Ca : at'$

$at' = \sqrt{2}.$

Die Kante B d. h. s't des Leucitoides läuft, wie wir issen, von $\frac{2m}{m+1}$ s nach ma (Fig. XXIII) von s' nach m.

Ziehen wir nun von 1 a eine Linie parallel Cs' nach der erlängerung dieser Kante ts't', so haben wir

3) $mC : Cs' = ma : at'$, oder wenn wir die Werthe dafür nsetzen $ma : \frac{2m}{m+1} s = (m+1) a : at$

$$\frac{2ms \cdot a}{ma} = at'$$

$$2s = at' = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Wir finden also, dass die von 1 a nach unserer verngerten Kante ts't parallel mit Cs' gezogene Linie identisch ird mit dem Stücke unserer Kante, das von der Dimension t bgeschnitten wird, dass also an diesem Puncte ein 3 und kantiges symmetrisches Eck entsteht, indem was für eine achsende Kante B und einen wachsenden Octanten gilt, uf gleiche Weise für die übrigen zu beweisen ist und für e gilt. Es ist also die neue Kante A' = der des Tetralers = der Würfeldiagonale, und ebenso die wachsende imension t = der des Tetraëders, = der des Würfels, ıs Leucitoid mag für m einen Werth haben, welchen es ill.

3) Berechnung der Kanten B'.

Es sei (Fig. XXIV) a b c die Fläche des Pyramidentetralers, so ist $ac = ab =$ unserer Kante $B' = \sqrt{(cd)^2 + (ad)^2}$ d ist gleich unserer halben Kante $= \frac{1}{2} A' = 2s = \sqrt{2}$, l ist die unveränderte Längendiagonale des Leucitoides

$$= \frac{\sqrt{2m^2+4}}{m+2} \text{ (pag. 47), also}$$

$$\sqrt{(cd)^2 + (ad)^2} = \frac{\sqrt{2 + 2m^2 + 4}}{m+2} = \frac{\sqrt{2(m+2)^2 + 2m^2 + 4}}{m+2}$$
$$= \frac{2\sqrt{m^2 + 2m + 3}}{m+2}$$

für $m = 2$ giebt dies $B' = \frac{\sqrt{11}}{2}$

„ $m = 3$ „ „ $B' = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

4) Die Neigungswinkel der Flächen gegen die Achsen bleiben unverändert wie bei den homoedrischen Leucitoiden, ebenso die Neigung in den Kanten B und die ebenen Winkel an den 3kantigen Ecken. Der Neigungswinkel in den Kanten A ist gleich dem der Neigung der Flächen gegen die Achsen a sin : cos = m s : 1 (pag. 42) für die

5) ebenen Winkel an den neuen 3 und 3kantigen Ecken (Fig. XXIV) ∢ a c d haben wir

sin : cos = ad : dc

$$= \frac{\sqrt{2m^2+4}}{m+2} : \sqrt{2} = \sqrt{m^2+2} : m+2$$

für $m = 2$ giebt dies wie $= \sqrt{6} : 4 = \sqrt{3} : 2\sqrt{2}$, also wie die halbe Querdiagonale desselben Leucitoides zu dem von ihr abgeschnittenen Stück der Längendiagonale (pag. 43). — Der ebene Winkel adb ist derselbe wie bei dem Leucitoide.

6) Die bisher beobachteten Pyramidentetraëder haben die folgende Werthe für m : $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{8}{3}$, 3, 4, 6, 40.

§. 31. Trapezoiddodecaëder (Weiss) r u. l $\frac{1}{2}$ [a : a : na] (Taf. IV, Fig. 35, 36). — Deltoiddodecaëder + und — $\frac{mO}{2}$ (Naumann). — Zweikantiges Tetragonaldodecaëder (Mohs).

Sie haben 12 Flächen, 12 bleibende Kanten C des Pyramidenoctaëders und 12 neue Kanten A', 4 reguläre 3kantige

Ecken, die unveränderte bleibende Hälfte der Pyramidenoctaëderecken, 6 symmetrische 2 und 2kantige an den Enden der Dimensionen a und 4 reguläre 3kantige an dem einen Ende von 4 Dimensionen t, welche dem Octanten angehören, dessen Flächen schwinden, in welchem sich also die 3 aus den 3 benachbarten Octanten hereinwachsenden Flächen schneiden. Sie entstehen aus dem Pyramidenoctaëder durch abwechselndes Wachsen und Schwinden je dreier über einer Octaëderfläche gelegenen Flächen desselben.

1) Berechnung der Dimension t'.

Wir können das Stück, welches durch unsere verlängerte Fläche abgeschnitten wird, leicht mit Hülfe des Theilungslehrsatzes berechnen. Es sei (Fig. XXVI) der Durchschnitt durch das Trapezoiddodecaëder n t' v ist der Verlauf seiner Fläche; zieht man n l von n nach dem Theil von t, der durch eine mit Cs parallele Linie al abgeschnitten wird, so wird nach §. 29. 1 al = 2 s und Cl = 3 t.

Nun gilt offenbar nach der Formel

$$N : M = x\,(a + b) : y a \text{ die Proportion}$$

$$l t' : t'C = l v . (nC + Ca) : va . Cn,$$ in welcher uns *alle* zur Auffindung des Verhältnisses N : M nöthigen Stücke bekannt sind, ausser va. Für dieses Stück va finden wir aber folgenden Werth. Es ist nC : Cs = nCa : av, die Werthe hiefür sind

$$n : s = n + 1 : av$$

$$\frac{(n + 1)\,s}{n} = av.$$

Setzen wir nun in die Proportion

lt' : t'C = lv (nC + Ca) : va . Cn die entsprechenden Werthe, so erhalten wir

$$lt' : t'C = (2s - \frac{(n+1)s}{n} . (n + 1) : \frac{(n + 1)\,s}{n} . n$$

$$= 2n-(n+1) : n = n-1 : n$$

$$t'C = \frac{n}{2n - 1} \text{ von } lC, \text{ von } 3t$$

unsere Dimension $t'C = t' = \frac{3n}{2n-1} t$

für $n = 2$ giebt dies $= 2t$

„ $n = 3$ „ „ $= \frac{9}{5} t$.

2) Werth der Kante $at' = A'$.

Der Lauf der Kante at' ist von 1 a nach dem Puncte von der Dimension s, in welchem sich die 2, an der Achse sich gegenüberliegenden wachsenden Flächen schneiden; die eine Fläche läuft durch 1 a, senkrecht auf C, gelegt von s' (Fig. XXV) nach r, die andere von v nach r. Der Werth von Cs' ist nach §. 23. 3. 2 für das Pyramidenoctaëder $= \frac{2n}{n+1} s$. Nun ist offenbar Fig. XXV $ss' : s'C = sa : Cr$, sa ist = der halben Octaëderkante = s = sC, also erhalten wir für die bezeichneten Linien die Werthe

$\frac{2ns}{n+1} - s : s = \frac{2ns}{n+1} : Cr$, daraus finden wir

$$\frac{2ns}{n-1} = Cr.$$

Es sei nun (Fig. XXVI) $Cr = \frac{2ns}{n-1}$, ar die ganze Kante, so finden wir für das bleibende Stück derselben at' folgenden Werth nach der Formel

$$x : y = Na : M(a+b)$$

$$at' : t'r = at \,.\, Cs : ts \,.\, Cr$$

$$= \tfrac{2}{3} d^{*)} s : \tfrac{1}{3} d \frac{2ns}{n-1}$$

$$= 2 : \frac{2n}{n-1} = n-1 : n, \; at' = \frac{n-1}{2n-1} \text{ von ar},$$

also $at' = \frac{n-1}{2n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{2ns}{n-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 2n^2}}{2n-1}$

$$A' = at' = \frac{\sqrt{3n^2 - 2n + 1}}{2n-1}.$$

*) d bedeutet hier wieder die Octaëderdiagonale (as unserer Fig. XXVI.)

ie Kante C′ ist die unveränderte Kante C des Pyramiden-
ctaëders, für die wir pag. 54 gefunden hatten

$$C = \frac{\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{2n + 1}.$$

3) **Die Neigung der Flächen gegen die Achsen.**

Sie ist dieselbe wie die der Fläche des Pyramiden-
taëders gegen die Dimension a sowohl wie gegen n a, pag. 50
atten wir gefunden

gegen a $\sin : \cos = n : \sqrt{n^2 + 1}$

„ n a $\sin : \cos = s : n$.

4) **Neigung der Kanten gegen die Achse a.**

Die Kante C hatte (pag. 51) $\sin : \cos = 2ns : n + 1$.

Die Kante A hat $\sin : \cos = 2ns : n - 1$.

Unsere Kante A läuft ja von 1 a nach $\frac{2ns}{n-1}$, also ist

$$\sin : \cos = \frac{2ns}{n-1} : 1 = 2ns : n - 1.$$

Sie ist also stets stumpfer geneigt als die bleibende,
nd kann nie dieselbe Neigung haben, da $n + 1$ nie $= n - 1$
erden kann, wie es unter dieser Voraussetzung sein müsste.

5) **Neigung der Flächen in den Kanten gegen
inander.**

1) **In den Kanten C′.**

Hiefür hatten wir pag. 52 gefunden

$$\sin : \cos = \sqrt{3n^2 + 2n + 1} : n - 1.$$

2) **In den Kanten A′.**

Für den halben Winkel haben wir, wenn durch rC
'ig. XXV) und das auf C senkrecht stehende a die halbirende
bene geht, das Verhältniss von $\sin : \cos = s'C : \frac{a \cdot rC}{\sqrt{a^2 + (rC)^2}}$ *)

*) d. h. das Perpendikel aus C auf die Kante, das ein Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreiecke auf die Hypotenuse ist, dessen Katheten Ca und Cr sind. (Fig. XXVI.)

$$= \frac{2n}{n+1}s : \frac{2ns}{n-1} \cdot \sqrt{\left(\frac{2ns}{n-1}\right)^2 + 1}$$

$$= \sqrt{2n^2+(n-1)^2} : n+1 = \sqrt{3n^2-2n+1} : n+1.$$

6) Ebene Winkel.

Für den ebenen Winkel an der 3 und 3kantigen Ecke für adb (Fig. XXVII) hatten wir §. 23. 6. sin : cos $= \sqrt{n^2+s^2}$: $(2n+1)s$.

Zur Bestimmung der übrigen Winkel des Deltoides brauchen wir das Verhältniss der einzelnen Theile der Diagonalen zu einander. ab (Fig. XXVII) ist gleich der Octaëderkante $= 2s$,

ed (nach §. 23. 6.) $= st' = \frac{\sqrt{n^2+s^2}}{2n+1}$, ec $= \sqrt{(cb)^2 - (eb)^2}$

$$= \frac{\sqrt{(3n^2-2n+1) - s^2(2n-1)^2}}{2n-1}.$$

Für den halben ebenen Winkel acb finden wir daher

sin : cos $=$ ae : ec $= (2n-1)s : \sqrt{3n^2-2n+1-s^2(2n-1)^2}$.

7) Die bisher beobachteten Trapezoiddodecaëder haben folgende Werthe für n : $\frac{3}{2}$, 2, 3.

§. 32. Hemihexakisoctaëder r u. l $\frac{1}{2}$ [a : ma : na] (Taf. IV. 38. 39.) Gebrochenes Pyramidentetraëder (Weiss). Hexakistetraëder + u. — $\frac{mOn}{2}$ (Naumann). Tetraëdrisches Trigonalicositetraëder (Mohs).

Sie sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken begränzt, und haben 3erlei Kanten und 3erlei Ecken, nehmlich von Kanten 12 paarweise über den Kanten des eingeschriebenen Tetraëders gelegene A', dann 12 längere B' und 12 kürzere C, die abwechselnd zu einem symmetrischen Eck über der Mitte der Tetraëderfläche zusammentreten. An Ecken haben sie 6 symmetrische 2 und 2kantige an den Enden der Dimensionen a, 4 symmetrische 3 und 3kantige bleibende Hexakisoctaëderecken über den Mitten der Tetraëderflächen und 4 symme-

trische 3 und 3kantige an der Verlängerung der 4 Dimensionen t. Sie entstehen ebenfalls durch abwechselndes Wachsen und Schwinden von je 6 einem Octanten angehörigen Flächen des Hexakisoctaëders.

1) Berechnung von t'.

Die neuentstehende Kante A', welche (Fig. XXX) a n', unsere Dimension t in t' schneidet, entsteht dadurch, dass 2 an einer Dimension a sich gegenüberliegende, von a nach m a und n a laufende Flächen gleichmässig sich über die verschwindenden ausdehnen und sich in einer Kante schneiden, welche von ihrem gemeinschaftlichen a, das senkrecht ist, auf unserem C in (Fig. XXVIII), nach einem Puncte der Dimension s läuft. Wir finden diesen Punct r, d. h. also die Grösse des von ihnen abgeschnittenen Stückes s auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden §. Es ist offenbar wieder (Fig. XXVIII) s's : s'C = sv : Cr. Setzen wir hiefür die entsprechenden Werthe ein (cfr. pag. 67), so erhalten wir die Proportion

$$\frac{2\,m\,n\,s}{m+n} - m\,s : \frac{2\,m\,n\,s}{m+n} = m\,s : x$$

$$2\,n - (m+n) : 2\,n = m\,s : x$$

$$\frac{2\,n\,m\,s}{n-m} = x.$$

Nach dem Lehrsatze über die Theilung der Linien im Dreiecke finden wir nun in Fig. XXX das gesuchte Stück Ct' auf folgende Weise.

Es sei $Ca = a = 1$, $Cs = s = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $Cn' = \frac{2\,n\,m\,s}{n-m}$, n'a unsere Kante A, a s = der Octaëderdiagonale = d, die durch t getheilt wird, dass sich die Theile verhalten wie 2 : 1, also $st = \frac{1}{3}\,d$ und $ta = \frac{2}{3}\,d$ ist. Zieht man nun n'n parallel sa, so ist offenbar $Cn : Cn' = Ca : Cs = as : nn' = a : s$, also

$$Cn = \frac{2\,n\,m}{n-m}\,a \text{ und } nl = \tfrac{2}{3}\,d\,.\,\frac{2\,n\,m}{n-m},\; n'l = \tfrac{1}{3}\,d\,.\,\frac{2\,n\,m}{n-m}.$$

Nach der Formel $N : M = x(a + b) : ya$ finden wir

$$Ct' : t'l = Ca\,(n'l + ln) : an\,.\,n'l$$
$$= \frac{2nm}{n-m} d : \left(\frac{2nm}{n-m} - 1.\right) \tfrac{1}{3} d\,.\,\frac{2nm}{n-m}$$
$$= 3(n-m) : 2nm - (n-m)$$
$$Ct' = \frac{3(n-m)}{2mn + 2(n-m)} \text{ von } Cl, \text{ von } \frac{2mn}{n-m} t$$

also $t' = Ct' = \dfrac{3mn}{mn + n - m}\, t.$

2) Berechnung der Kanten.

1) Der Kante A', at' Fig. XXIX und XXX.

Wir finden das Stück at' von an' mit Hülfe der Formel

$$x : y = Na : M(a + b) \text{ dies giebt uns (Fig. XXX)}$$
$$at' : t'n' = at\,.\,Cs : ts\,.\,(Cs + sn')$$
$$= \tfrac{2}{3} ds : \tfrac{1}{3} d\,.\,\frac{2mns}{n-m}$$
$$= n - m : mn$$
$$at' = \frac{n-m}{nm + n - m} \text{ von } an' \text{ von } \sqrt{1 + \left(\frac{2mns}{n-m}\right)^2}$$
$$A' = at' = \frac{\sqrt{(n-m)^2 + 2m^2n^2}}{mn + n - m}.$$

2) Der Kante B'.

Die Kante $B = tt'$ (Fig. XXIX) ist die Verlängerung der Kante $B = tr'$ des Hexakisoct., welche $= \dfrac{m\sqrt{2m^2 + n^2(m+1)^2}}{(nm+n+m)(m+1)}$ (pag. 70) gefunden wurde. Setzen wir diese Grösse $= M$, so haben wir nach der Formel

$$N : M : N + M = x(a + b) : ya : x(a + b) + ya \text{ in Fig. XXIX}$$
$$t'r' : r't : t't = t's\,(Ct + tv) : sv\,.\,Ct : t's\,.\,Cv + sv\,.\,Ct;$$

ziehen wir aber $t'v$ parallel a, so wird Cv, hier unsere Grösse $(a + b)$ im Dreiecke $t'Cv = Ct' = \dfrac{3mnt}{mn + n - m}$, $t's = sv$ und Ct, die Dimension t des Hexakisoctaëders ist hier unsere Grösse a nach pag. 62 $= \dfrac{3mnt}{mn + n + m}$.

us diesen Stücken erhalten wir nun, wenn wir die betref-nden Werthe einsetzen, und da x d. h. t's = y = sv die ictoren x und y aus allen Gliedern weglassen

$$N : M : N + M = (a + b) : a : a + a + b$$

$$N + M = \frac{a + a + b}{a} M$$

$$N + M = \frac{\frac{3\,m\,n\,t}{m\,n + m + n} + \frac{3\,m\,n\,t}{m\,n + n - m}}{\frac{3\,m\,n\,t}{m\,n + m + n}} M$$

$$= \frac{2\,m\,n + 2\,n}{m\,n + n - m} M$$

$$B' = N + M = \frac{(2\,m\,n + 2\,n)\ m \sqrt{2m^2 + n^2(m+1)^2}}{((m\,n + n)^2 - n^2)\,(m + 1).}$$

3) Der Kante C'.

Sie ist die unveränderte Kante C des Hexakisoctaëders, r die wir pag. 71 gefunden hatten

$$C = \frac{\sqrt{(n + m)^2 + 2\,m^2\,n^2}}{m\,n + n + m.}$$

3) Neigungswinkel der Flächen gegen die chsen.

Dieselben sind unverändert (cfr. pag. 63), wie bei den ›xakisoctaëdern, nehmlich gegen die 3 verschiedenen Dimen-›nen a für die Fläche | a : ma : na |

1) gegen a $\sin : \cos = m\,n : \sqrt{m^2 + n^2}$

2) gegen ma $\sin : \cos = n : m\sqrt{n^2 + 1}$

3) gegen na $\sin : \cos = m : n\sqrt{m^2 + 1}.$

4) Neigung der Kanten gegen die Achsen.

Die Kante B' und C' behalten dieselben Werthe wie die tsprechenden am Hexakisoctaëder; für die neuentstandene nte A', die von a nach $\frac{2\,m\,n\,s}{n - m}$ läuft (s. pag. 95) ist das Ver-

hältniss von sin : cos wie diese letztere Grösse zu a, also ist die Neigung

1) der Kante A' gegen a sin : cos $= 2\,m\,n\,s : n - m$

2) „ „ B' „ „ „ : „ $= 2\,m\,s : n\,(m+1)$

3) „ „ C' „ „ „ : „ $= 2\,m\,n\,s : n + m.$

5) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.

Auch hier ist wieder die Neigung in den Kanten B' und C' dieselbe wie bei den gleichen Hexakisoctaëderkanten; für die neuentstandene Kante finden wir das Verhältniss von sin : cos in den Linien Cs' Fig. XXVIII, für den Sinus, wenn das Perpendikel aus C auf unsere Kante A, die ja von r (Fig. XXVIII) nach dem auf C senkrechten a geht, den Cosinus darstellt.

Es ist also hier sin : cos $= \dfrac{2\,m\,n\,s}{m+n} : \dfrac{\dfrac{2\,m\,n\,s\,.\,a}{n-m}}{\dfrac{\sqrt{2\,m^2\,n^2+1}}{n-m}}$

$= \sqrt{2\,m^2\,n^2 + (n-m)^2} : m + n.$

Wir haben somit für die 3erlei Kantenwinkel

1) in der Kante A' sin : cos $= \sqrt{2\,m^2\,n^2 + (n-m)^2} : m+n$

2) „ „ „ B' „ : „ $= \sqrt{n^2(m+1) + 2m^2} : n(m-1)$

3) „ „ „ C' „ : „ $= \sqrt{(m+n)^2 + 2\,m^2\,n^2} : n-m.$

6) Ebene Winkel des Hexakistetraëders.

Man berechnet die ebenen Winkel auf dieselbe Weise wie die des Hexakisoctaëders aus den 3 Seiten der Dreiecke nach den bekannten trigonometrischen Formeln für die Sinuse und Cosinuse.

Der Winkel a ist derselbe wie der am Hexakisoctaëder, für den Winkel b verhält sich

sin : cos $= A\,.\,C\sqrt{(B+C-A)\,.\,(B+A-C)} : (A^2+C^2-B^2)\sqrt{AC}$

für den Winkel c verhält sich

sin : cos $= A\,.\,B\sqrt{(C+B-A)\,.\,(C+A-B)} : (A^2+B^2-C^2)\sqrt{AB}.$

Man kommt dann auf die Formeln für

1) Winkel a $\sin : \cos = (mn + n + m) \sqrt{n^2 (m^2 + 1) + m^2} :$
$m\,[m\,(n^2 - n + 1) + n\,(n + 1)]$

2) „ b $\sin : \cos = (mn + n - m) \sqrt{n^2 (m^2 + 1) + m^2} :$
$m\,[m\,(n^2 + n + 1) + n\,(n - 1)]$

3) „ c $\sin : \cos = 2\,m\,n \sqrt{n^2\,(m^2 + 1) + m} :$
$(m + n)\,(n - m).$

7) Die bisher beobachteten haben folgende Werthe für

$m : \frac{4}{3}, \frac{15}{11}, \frac{3}{2}, \frac{11}{5}, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 4$

$n : 2, \frac{15}{7}, 3, \frac{11}{3}, 4, 5, 7, 8.$

B. Parallelflächig hemiedrische Gestalten.

§. 33. Wie schon pag. 82 auseinandergesetzt wurde, giebt es nur 2 derselben, nehmlich die Hälftflächner der Pyramidenwürfel und der Hexakisoctaëder. Die Art und Weise des Wachsens und Schwindens der Flächen bei dieser Form der Hemiedrie bringt es mit sich, dass keine der 3erlei Dimensionen eine Veränderung ihres Werthes im Vergleich mit dem bei ihrer homoedrischen Ausbildung erleidet, da ja an jeder der 6 Dimensionen a, der 12 s und der 8 t wachsende und schwindende Flächen liegen. Weil es nun nicht mehr die verschiedenen Octanten sind, welche entweder wachsen oder schwinden, bei welcher Art von Hemiedrie der Durchschnitt durch die Gränzen der Octanten unverändert bleibt, so ändert sich jetzt der Durchschnitt durch diese Gränzen, d. h. der Schnitt durch je 4 in einer Ebene liegende Dimensionen a und s. Dagegen bleibt jetzt der Durchschnitt, welcher durch die Gränzen der wachsenden und schwindenden Pyramiden, der Sesquiquadranten geht, d. h. der durch 2 Dimensionen a, 2 Dimensionen s und 4 Dimensionen t geführte oder der Octaëderdiagonalenschnitt, unverändert derselbe bei der homoedrischen und hemiedrischen Gestalt.

§. 34. **Hälftflächner der Pyramidenwürfel** r und l $\frac{1}{2}$ | a : ma : ∞ a | Pyritoëder (Weiss) (Taf. IV. 41. 42). Pentagondodecaëder + u. — $\frac{\infty O n}{2}$ (Naumann). Hexaëdrisches Pentagonaldodecaëder (Mohs). Kieszwölfflach (v. Raumer).

Sie sind von 12 symmetrischen Pentagonen, d. h. solchen, welche 4 gleiche Seiten, und 2 Paare gleicher Winkel haben, umschlossen; haben 6 über der Mitte der Würfelfläche gelegene ihr parallele sg. Grund- oder characteristische Kanten A' und 24, zu je 3 von den Ecken des eingezeichneten Würfels ausgehende Kanten B', 12 unregelmässige an den Enden der Grundkanten liegende 2 und 1kantige und 8 regelmässige 3kantige den Ecken des eingezeichneten Würfels entsprechende Ecken.

1) Verhältniss der 3erlei Dimensionen.

Wir fanden dafür beim Pyramidenwürfel pag. 55

$$a : s' . t' = 1 : \frac{2 m}{m + 1} s : \frac{3 m}{m + 1} t.$$

2) Berechnung der Kanten.

1) Der Grundkanten A'.

Sie entsteht dadurch, dass sich 2 an einem a einander gegenüberliegende Flächen des Pyramidenwürfels schneiden. Da diese beiden Flächen parallel einem und demselben a laufen, so muss die Kante, die sie bei ihrer Vergrösserung bilden, ebenfalls parallel diesem a laufen und daher rechtwinklich zu den beiden andern stehen. Den Werth dieser Kante finden wir auf folgende Weise. Es sei Fig. XXXI ein Durchschnitt durch ein Pyritoëder in der Richtung durch 4 in einer Ebene liegende a. Die beiden durch a gehenden wachsenden Flächen, welche parallel dem a·a' (Fig. XXXI) gehen, werden in der Richtung der Linie rv sich schneiden und soweit sich ausdehnen und eine Kante in der bezeichneten Richtung bilden, bis sie von den wachsenden Flächen

welche von $a^{\cdot}$ und $a^{\cdot\prime}$ nach $m = ma$ gehen, geschnitten werden.

Nun gilt die Proportion

$ma : mC = ar : Ca^{\cdot} = av : Ca^{\cdot\prime}$, oder, wenn wir die entsprechenden Werthe für diese Linien einsetzen

$$m - 1 : m = ar : 1 = av : 1$$

$$ar = \frac{m-1}{m} = av.$$

Unsere Kante $A' = vr$ ist also $= \frac{2(m-1)}{m}$.

Für $m = 2$, den gewöhnlichsten Fall, der beim Schwefelkies, Pyrites der Alten, vorkommt, woher diese Gestalt auch den Namen Pyritoëder erhalten hat, ist also diese Kante $= 1$ gleich der Dimension a.

2) Der Kanten B'.

In Fig. XXXII geben uns die Linien at, tt und ta, welche von a nach den 2 Dimensionen t und zwischen diesen beiden gezogen sind, die Fläche des Pyramidenwürfels an, dessen hemiedrischer Körper die Fläche v t r t v zur Begränzung hat, da ja bei dem Hemiedrischwerden weder die Dimensionen a noch t, also auch nicht die zwischen ihnen gezogenen Linien eine Veränderung erleiden. Die Kante B' ist nun gleich $\sqrt{(ts)^2 + (rs)^2}$. ts ist = der halben Pyramidenwürfelkante B $= \frac{m}{m+1}$ (pag. 59). Wie finden wir nun das Stück sr?

Die ganze Diagonale $ra^{\cdot}$ (Fig. XXXI) finden wir leicht auf folgende Weise. Es ist offenbar

$a^{\cdot}r : a^{\cdot}m = Ca : Cm$, d. h. wenn wir die Werthe für diese Linien einsetzen

$$a^{\cdot}r : \sqrt{m^2+1} = 1 : m$$

$a^{\cdot}r = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}$; für as, die Höhenlinie des Dreiecks des Pyramidenwürfels hatten wir gefunden (pag. 60)

$$as = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}.$$ Ziehen wir as von ar ab, so erhalten wir

$$sr = ar - as = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m} - \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}.$$

$$= \frac{(m+1)\sqrt{m^2+1} - m\sqrt{m^2+1}}{m.(m+1)}$$

$$sr = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+m},$$ für B′ finden wir daraus

$$B' = \sqrt{(ts)^2 + (sr)^2} = \sqrt{\left(\frac{m}{m+1}\right)^2 + \frac{m^2+1}{(m^2+m)^2}}$$

$$B' = \frac{\sqrt{m^4+m^2+1}}{m^2+m}.$$

3) Neigungswinkel der Flächen gegen die Achse.

Es ist unverändert dieselbe wie beim Pyramidenwürfel
sin : cos = m : 1.

4) Neigungswinkel der Kanten gegen die Achse a.

Nur unsere Grundkante kommt hier in Betracht, da die Kanten B an keine unserer Dimensionen a laufen. Die Grundkante ist senkrecht auf 1 a, und läuft parallel den beiden andern und zwar in der Weise, dass sie dieselbe Richtung hat, wie das a, welchem die beiden Flächen, von denen sie gebildet wird, parallel laufen und ihre Richtung auf der desjenigen a, welches ihre Flächen in der Entfernung ma schneiden, senkrecht ist.

5) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.

1) In den Kanten A′.

Die beiden Flächen bilden denselben Winkel, den 2 an der Achse sich gegenüberliegende Flächen des Pyramidenwürfels bilden, der halbe Winkel ist also gleich dem der

Neigung einer Fläche des Pyramidenwürfels gegen die Achse, wofür wir hatten

$$\sin : \cos = m : 1.$$

2) In den Kanten B'.

Denken wir uns einen Schnitt senkrecht auf der Dimension t und zwar so geführt, dass derselbe durch die 3 um das Würfeleck liegenden unregelmässigen Eckpuncte geht, also in die Linie vr (Fig. XXXII) fällt, so werden dadurch die Kanten B' vollkommen abgeschnitten. Da die Linien vr auf sämmtlichen Flächen gleich lang sind, so muss die Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck sein, dessen Seite = vr ist. Denken wir nun den fraglichen Kantenwinkel halbirt, so wird die Halbirungsfläche in der Richtung einer der Diagonalen unseres Dreieckes laufen. Das Verhältniss von sin : cos ist uns nun wieder in den Linien gegeben, von denen die eine, der Sinus, senkrecht auf unserer Halbirungsfläche, also auf einer der Diagonalen des gleichseitigen Dreieckes steht. Wählen wir diese Linie so, dass sie aus dem Mittelpunct des Dreieckes gezogen wird, so ist die zweite das Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreiecke auf die Kante B', in dem die Höhe der abgeschnittenen 3seitigen Pyramide, d. h. das von unserer Dimension t abgeschnittene Stück, eine Kathete, die andere sc = $\frac{2}{3}$ der Diagonale des Dreieckes d. h. der Grundfläche der Pyramide, ist, und die Hypotenusa unsere Kante B'. Drücken wir die Höhe mit A, die Diagonale mit D aus, unsere Kante B' mit B, so erhalten wir

$$\sin : \cos = B : \sqrt{3} . H$$
$$= \sqrt{m^4 + m^2 + 1} : m^2 - m + 1.$$

Beweis: Unserer Annahme nach sei in Fig. XXXIII c der Mittelpunct des gleichseitigen Dreieckes svs', dessen Seite wir S nennen wollen, und cy senkrecht auf unserer den Kantenwinkel halbirenden Ebene, deren Verlauf von s

durch c nach x, also in der Diagonale des Dreieckes geht, so ist offenbar $sc : sx = cy : xv$, also

$$cy = \frac{2}{3}\, xv = \frac{1}{3}\, vs' = \frac{1}{3}\, S.$$

Wie finden wir nun die Höhe der abgeschnittenen Pyramide, d. h. das abgeschnittene Stück unserer Dimension t, die Diagonale und die Seite S?

1) Die Höhe: Es sei Fig. XXXIV der Durchschnitt des Würfels durch 2 gegenüberliegende Kanten und Diagonalen der Flächen, $Ct = t'$ des Würfels $= \sqrt{3}$. $ta =$ der Würfelkante $= 2$. aw sei ein Schnitt senkrecht auf t, der durch 3 Würfelecken, also auch durch 3 Würfeldiagonalen geht. Da sich nun die Diagonalen halbiren, so wird $tw =$ der halben Würfeldiagonale $= \sqrt{2}$, also $aw = \sqrt{(at)^2 + (tw)^2} = \sqrt{6}$, $tc = \frac{at \cdot tw}{aw}$ als Perpendikel im Dreiecke atw auf die Hypotenuse $= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\, tC = 2\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\,t$ des Octaëders. Führen wir nun am Pentagondodecaëder einen Schnitt in der Richtung xs (Fig. XXXII und XXXIV) d. h. durch die Mitte der Kanten des Pyramidenwürfels und des eingeschriebenen Würfels, so lässt sich leicht zeigen, dass ein solcher Schnitt von der Dimension t' die Hälfte von dem Stücke abschneidet, welches von dem durch die Ecken gehenden Schnitte weggenommen wird, indem $tz : tc = ts : ta$. Ist nun $ts = \frac{1}{2}\, ta$, so ist $tz = \frac{1}{2}\, tc = \frac{1}{3}\, Ct = \sqrt{\frac{1}{3}} = t$. Der durch vlr am Pentagondodecaëder geführte Schnitt, vl (Fig. XXXII und XXXIV) schneidet die Dimension t so, dass sich th zu tz verhält, wie $tl : ts$. Es ist aber

$$tl = ts - ls \text{ (Fig. XXXII)} = \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m(m+1)} = \frac{m^2 - m + 1}{m^2 + m}$$

dass $ls = \frac{m-1}{m(m+1)}$, ergiebt sich leicht auf folgende Weise:

In Fig. XXXII ist $rs : ra = sl : av$

$$\frac{rs \,.\, av}{ra} = sl.$$ Setzen wir hiefür die pag. 102 gefundenen entsprechenden Werthe, so erhalten wir

$$\frac{\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+m} \cdot \frac{m-1}{m}}{\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}} = sl = \frac{m-1}{m^2+m} \text{ wie oben.}$$

Für die Dimension t' des Pentagondodecaëders hatten wir gefunden $t' = \frac{3m}{m+1} t$. Es ist also

$$th : tz = tl : ts$$

$$th : \frac{1}{3} \cdot \frac{3mt}{m+1} = \frac{m^2-m+1}{m^2+m} : \frac{m}{m+1}.$$ Daraus findet man $th = \frac{m^2-m+1}{m^2+m} t$ als die gesuchte Höhe H.

2) Die Diagonale D und die Seite S.

In jedem gleichseitigen Dreiecke halbirt die Diagonale die gegenüberliegende Seite und steht rechtwinklig auf ihr. *Also* ist $sx =$ (Fig. XXXIII) $= D = \sqrt{S^2 - \frac{1}{4}S^2} = S\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Wir erhalten daher für den gesuchten halben Kantenwinkel (Fig. XXXIII)

$$\sin : \cos = yc : \frac{H \,.\, sc}{B}$$

$$= \tfrac{1}{3} S : \frac{H \,.\, \frac{2}{3} S\sqrt{\frac{3}{4}}}{B}$$

$$= B : H \,.\, \sqrt{3} \text{ wie oben}$$

$$= \frac{\sqrt{m^4+m^2+1}}{m^2+m} : \frac{m^2-m+1}{m^2+m} t \,.\, \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{m^4+m^2+1} : m^2-m+1 \text{ wie oben.}$$

6) Ebene Winkel.

Wir können die ebenen Winkel des Pentagondodecaëders aus den Winkeln der einzelnen Dreiecke berechnen, in die

es zerfällt und deren Seiten uns alle bekannt sind. Für den halben Winkel trt haben wir

$$\sin : \cos = ts : sr = \frac{m}{m+1} : \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+m}$$
$$= m^2 : \sqrt{m^2+1}.$$

Für den Winkel vtr = b finden wir die Werthe aus den 3 Seiten des Dreieckes, wovon 2 unsere Kanten B sind, die 3te $vr = \sqrt{(va)^2+(ar)^2}$ (Fig. XXXII) $= \frac{\sqrt{2m^2-2m+2}}{m.}$

Für den Winkel tva = c finden wir den Werth aus den bekannten Werthen der Kante B, der halben Grundkante und at. Setzen wir für den Winkel b, die Seite B $= \beta$, vr $= \gamma$, für den Winkel c va $= \alpha$, vt $= \beta$, at $= \gamma'$ so erhalten wir für den Winkel b sin : cos $= 2\gamma : (2\beta^2 - \gamma^2)\beta$

$$c\ \text{„}\quad\text{„} = 2\alpha\beta\sqrt{(\gamma'+\alpha-\beta)(\beta+\gamma'-\alpha)} : \sqrt{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2).$$

Wegen der geringen Bedeutung der ebenen Winkel führen wir diese Rechnung weiter nicht aus.

7) Die bekannten Pentagondodecaëder haben für m die Werthe $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, $\frac{7}{2}$, 4.

§. 35. Hemioctakishexaëder r u. l $\frac{1}{2}$ | a : ma : na | (Taf. IV, Fig. 46. 47). Gebrochene Pentagondodecaëder (Weiss). Dyakisdodecaëder $\frac{mOn}{2}$ (Naumann). Dreikantige Tetragonal-ikositetraëder (Mohs). Kiesvierundzwanzigflach (v. Raumer).

Sie sind von 24 Trapezen begränzt und haben 3erlei Kanten und dreierlei Ecken. Die 12 kürzesten Kanten liegen paarweise über der Grundkante der Pentagondodecaëder, die 12 längsten einzeln über den senkrecht auf der Mitte der Grundkante gezogenen Diagonalen der Pentagondodecaëderflächen. Die Lage dieser beiden Arten von Kanten macht, dass diese Gestalten wie Pentagondodecaëder erscheinen,

welche längs der erwähnten Diagonale vom Mittelpunct aus nach aussen geknickt oder gebrochen erscheinen, woher ihnen die Bezeichnung „gebrochene Pentagondodecaëder" zukommt. Die dritte Art von Kanten stossen zu 3 an der Dimension t zusammen, sind also zu 24 vorhanden. Die Ecken sind ebenfalls dreierlei:

6 symmetrische von 2 längsten und 2 kürzesten Kanten gebildete an den Dimensionen a, 8 regelmässige dreikantige an den Dimensionen t, über der Mitte der Flächen des eingeschriebenen Octaëders und 12 unregelmässige 1-, 2- und 1kantige über den Kanten desselben gelegene.

1) Der Werth der dreierlei Dimensionen bleibt wie beim Hexakisoctaëder unverändert

$$a' : s' : t' = a : \frac{2m}{m+1} s : \frac{3mn}{mn+n+m} t \text{ (pag. 61).}$$

2) Werth der 3erlei Kanten.

1) Der über der Grundkante des Pentagondodecaëders gelegenen Kanten A'.

Sie entstehen dadurch, dass je 2 an einem a sich gegenüberliegende Flächen wachsen und sich in einer Kante schneiden. Diese Kante läuft von dem gemeinschaftlichen 1 a dieser beiden Flächen nach dem zweiten gemeinschaftlichen Punct beider Flächen nach n a (Fig. XXXV von a nach n). Das Stück von ihr bleibt als Kante, welches nicht von den beiden ebenfalls wachsenden Flächen an dem a, welches die erstbezeichneten in der Entfernung n schneiden, abgeschnitten wird, welches also näher dem Mittelpunct des Körpers liegt, als die von den beiden letzteren gebildete Kante, die von a' nach m a läuft. (a' m Fig. XXXV). Das bleibende Stück a r ist nun unsere gesuchte Kante A'. Wir finden für dasselbe, wenn wir in die Formel N : M = x (a + b) : y a die entsprechenden Linien und deren Werthe einsetzen:

$$nr : ra = na' (ma + aC) : a'C . ma$$
$$= (n - 1) m : m - 1$$

$$ra = \frac{m-1}{nm-1} \text{ von } na, \text{ d. i. von } \sqrt{(nC^2) + (Ca)^2}$$
$$= \sqrt{n^2+1}$$

$$\text{Kante } A' = ra = \frac{(m-1)\sqrt{n^2+1}}{nm-1}.$$

2) Der über der Diagonale der Pentagondodecaëderfläche gelegenen Kanten B'.

Es sind das die mit den Kanten A' über der Kante des eingeschriebenen Octaëders in der bei A' erwähnten Weise zusammenstossenden längsten Kanten a·r Fig. XXXV, die von 1a· nach ma (m Fig. XXXV) laufen. Nach derselben Formel finden wir für sie $mr : ra^{\cdot} = ma\ (na^{\cdot} + a^{\cdot}C) : aC\ .\ na^{\cdot}$
$$= (m-1)\,n : n-1$$
$$ra^{\cdot} = \frac{n-1}{mn-1} \text{ von } a^{\cdot}m, \text{ von } \sqrt{m^2+1}$$
$$\text{Kante } B' = ra^{\cdot} = \frac{(n-1)\sqrt{m^2+1}}{mn-1}.$$

3) Der zu 3, an der Dimension t zusammenstossenden Kanten C'.

Sie entstehen dadurch, dass sich die an einem t anliegenden abwechselnden Flächen bei ihrer Vergrösserung schneiden und so also eine Kante bilden, welche von t' nach der Ebene läuft, welche 2 Raumoctanten trennt, in welcher die Kanten A' und B' liegen und dort mit der Kante C' des andern Octanten und den Kanten A' und B' zu dem unregelmässigen Ecke zusammenstösst. Da die durch diese Kante und den Mittelpunct gelegte Ebene mit keinem unserer 2erlei Schnitte durch die Kanten oder die Diagonalen des Octaëders zusammenfällt, sondern bei den verschiedenen Werthen von m und n stets eine verschiedene Lage hat, so ist eine allgemein gültige Berechnung dieser Kante nach der bisherigen Methode ziemlich weitläufig. Der einfachste Weg ist noch der, wenn man die Kante C' als Hypotenusa eines rechtwink-

en Dreiecks berechnet, dessen eine Kathete das Perpenkel aus dem nicht an t anliegenden Endpuncte der Kante C′, ndern von dem unregelmässigen Eck aus auf t ist, während r andere das Stück von t ist, welches oberhalb dieses rpendikels liegt. Es sei (Fig. XXXVI) eine Ebene, welche rch unsere Kante, die Dimension t und also auch durch n Mittelpunct gelegt ist, C der Mittelpunct, tC unsere mension $t' = \frac{3mn}{mn + n + m} t$, tr unsere Kante C′, r der regelmässige Endpunct, rp, das auf t′ gefällte Perpendikel, · = Cr (Fig. XXXV) die aus dem Mittelpuncte nach r hende Linie, durch welche unsere Ebene geht, so ist sere Kante

$$C' = tr = \sqrt{(pr)^2 + (pt')^2}.$$

ir suchen nun die Werthe für diese beiden Linien.

1) pr. —

Es sei in Fig. XXXV aa′ die Kante des Octaëders, C r die Linie nach r, dem Endpuncte unserer Kanten A′ und , so verhält sich offenbar das aus d gefällte Perpendikel f t′ zu dem aus r gefällten wie Cd : Cr. Das aus d, h. der Octaëderkante, auf t′ gefällte Perpendikel schneidet, e wir wissen $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ab. Nun ist nach der Formel

$$N : M = x(a + b) : ya$$

$$Cd : dr = Ca\,(a \cdot r + r\,m) : a\,m\,.\,a \cdot r$$

r a′r : rm : a·m hatten wir gefunden (pag. 108)

$$n - 1 : (m - 1)\,n : mn - 1, \text{ also ist}$$

$$Cd : dr : Cr = mn - 1 : (m - 1)(n - 1) : 2mn - m - n$$

r Cr finden wir (Fig. XXXV) $Cr = \sqrt{(rl)^2 + (cl)^2}$.

Es verhält sich aber

a) $lr : Ca \cdot = mr : ma \cdot = (m - 1)\,n : mn - 1$,

raus erhalten wir, da $Ca \cdot = 1$ $lr = \frac{(m - 1)\,n}{mn - 1}$

b) $Cl : Cm = a \cdot r : a \cdot m = n - 1 : mn - 1$.

Wir finden daraus $Cl = \frac{(n-1)m}{mn-1}$

da $Cm = m$

also ist $Cr = \frac{\sqrt{(nm-n)^2 + (nm-m)^2}}{mn-1}$.

Unser Perpendikel aus r auf die Dimension t' ist aber (Fig. XXXVI) $rp = \sqrt{(Cr)^2 - (Cp)^2}$ das aus d auf t' gefällte Perpendikel dh schneidet von t' $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ab, das von r gefällte Perpendikel schneidet ein Stück ab, das sich zu dem vorigen verhält $= Cr : Cd = 2mn - m - n : mn - 1$.

Ist nun jenes gleich 1 t, so ist dieses $Cp = \frac{2mn - m - n}{mn-1} t$.

Unser Perpendikel rp ist also

$$= \frac{\sqrt{(nm-n)^2 + (nm-m)^2 (2mn-m-n)t)^2}}{mn-1}.$$

2) pt.

pt ist gleich $\frac{3mn}{mn+m+n} t - \frac{(2mn-m-n)}{mn-1} t$.

Also unsere Kante $C = \sqrt{(pr)^2 + (pt)^2}$ ist gleich

$$\sqrt{\frac{(nm-n)^2 + (nm-m)^2 - (2mn-m-n)t)^2}{(mn-1)^2} + \frac{mn(mn-m-n-1) + m^2 + n^2)^2 t^2}{(mn+m+n)^2 (mn-1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(mn+m+n)^2 [(nm-n)^2 + nm-m)^2 - (2mn-m-n)t)^2] + (mn(mn-m-n-1) + m^2 + n^2)^2 t^2}}{(mn+m+n\,(mn-1)}.$$

Es wird in den meisten Fällen am besten sein, wenn man eine bestimmte Kante berechnen will, sich der Formel $C' = \sqrt{(pr)^2 + (pt)^2}$ zu bedienen, und die Werthe von pr und pt nach den für sie gefundenen Formeln zu berechnen, da man sich die Rechnung dadurch bedeutend abkürzen wird.

3) Neigung der Flächen gegen die Achsen.

Sie bleiben unverändert dieselben, wie an dem homo-

edrischen Körper. Wir hatten die Neigung einer Fläche gefunden (pag. 63)

$$\text{gegen a . sin : cos} = \text{m n} : \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\text{„ ma „ „} = \text{n} : \text{m}\sqrt{n^2 + 1}$$

$$\text{„ na „ „} = \text{m} : \text{n}\sqrt{m^2 + 1}.$$

4) Neigung der Kanten gegen die Achsen.

Nur die Kanten A' und B' laufen zu den Dimensionen a. Die Kanten B' sind die verlängerten Kanten A des Hexakisoctaëders und haben daher dieselbe Neigung wie diese gegen a. Die Kanten A' laufen von a nach na. Wir haben daher für die Neigung der Kanten A' sin : cos = na : a = n : 1,
der Kanten B' „ : „ = ma : a = m : 1
pag. 67).

5) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.

1) In den Kanten A'.

Suchen wir das Verhältniss von sin : cos wieder für den halben Winkel, so finden wir, wenn wir als Cosinus das Perpendikel aus dem Mittelpunct auf die Kante annehmen, also das Perpendikel im rechtwinkligen △, wo a und na die Katheten sind, aus dem rechten Winkel auf die Hypotenusa, den Sinus in der auf unserer den Winkel halbirenden Ebene senkrechten Dimension a, und zwar in dem Stücke derselben das von der, den fraglichen Kantenwinkel bildenden Fläche abgeschnitten wird. Es ist dieses = ma. Wir haben daher

$$\text{sin : cos} = \text{ma} : \frac{\text{na . a}}{\sqrt{(\text{na})^2 + \text{a}^2}} = \text{m} : \frac{\text{n}}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

$$= \text{m}\sqrt{n^2 + 1} : \text{n},$$

also das Complement des Winkels, unter dem die Fläche gegen die Achse ma geneigt ist, zu 90°.

2) In den Kanten B'.

Die Kanten B' sind gebildet von 2 bleibenden Flächen

des Hexakisoctaëders, der Kantenwinkel ist also derselbe, wie der der Kante A dieses Körpers

$$\sin : \cos = n\sqrt{m^2+1} : m \text{ (pag. 68)},$$

also gerade das Complement des Neigungswinkels der Fläche gegen die Achse na zu 90°.

3) In den Kanten C'.

Denken wir uns durch eine Ebene ein an t' gebildetes Eck in der Art abgeschnitten, dass dieselbe durch die drei Endpuncte der Kanten C' geht, welche nicht an t' zusammenliegen, also durch die 3 gleichen unregelmässigen Ecken oder die Puncte r (Fig XXXVI), so wird die Schnittfläche durch unser Perpendikel rp gehen und ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Seite gleich der Diagonale rr (Fig. XXXVII) ist. Halbiren wir nun den Kantenwinkel C, so wird die Halbirungsfläche durch C' und durch die Diagonale des Dreiecks durch sc (Fig. XXXIII) gehen. Das Verhältniss von sin : cos finden wir dann wie beim Pentagondodecaëder für den Kantenwinkel B' in dem Verhältniss der Linie yc (Fig. XXXIII) zu dem Perpendikel aus dem Mittelpuncte des Dreieckes auf unsere Kante C', d. h. zu dem Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke auf die Hypotenuse, in welchem unsere Grössen pt und rp die Katheten, C' die Hypotenuse ist.

Da die Linie sc (Fig. XXXIII) = rp (Fig. XXXVI) ist, d. h. $\frac{2}{3}$ der Diagonale des Dreieckes, dessen Seite S wir suchen, uns bekannt ist, so finden wir daraus leicht die gesuchte Seite. Setzen wir die Linie rp = P, die Diagonale = D, die gesuchte Seite des Dreieckes = S, so ist, da die Diagonale des rechtwinkligen Dreieckes stets $D = \sqrt{S^2 - \frac{1}{4}S^2}$ $S = \sqrt{\frac{4}{3}}\,D$. D aber ist $= \frac{3}{2}P$, also in diesem Falle

$$S = \frac{3}{2}P \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}P.$$

Unsere Sinuslinie yc (Fig. XXXIII ist, da sc : sx = 2 : 3 = yc : vx' $= \frac{1}{3}S = \frac{1}{\sqrt{3}}P$. Also ist

$$\sin : \cos = \frac{1}{\sqrt{3}} rp : \frac{pt . rp}{C'}$$
$$= C' : pt \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{(rp)^2 + (pt)^2} : pt \sqrt{3}.$$

Auch hier wird man, wie für die Kante C' selbst am
sten die gesuchten Werthe finden, wenn man die einzelnen
ctoren, wie pag. 110, für sich berechnet nach den Formeln,
e eben daselbst für sie gefunden wurden.

4) Ebene Winkel.

Durch die Diagonale rr (Fig. XXXVII), deren Werth
ir in der pag. 112 angeführten Weise $= \frac{3}{\sqrt{3}}$ P finden,
rfällt uns das Trapez des Dyakisdodecaëders in 2 Dreiecke,
ren Seiten uns sämmtlich bekannt sind, und aus denen
ir dann (nach C III) diese berechnen können nach den-
lben Formeln. Aus diesen finden wir wieder (nach C IV)
n und Cos für die ganzen Winkel. Für den Winkel ral
den wir das Verhältniss sin : cos einfacher in den Linien rl
ad al (Fig. XXXIX und XL) d. h. dem Perpendikel aus r
if die Kante B' und dem davon abgeschnittenen Stücke der
nte B'. Ziehen wir aus na, wohin ja (pag. 111) die ver-
gerte Kante A', geht, ein Perpendikel auf die Kante B',
Fig. XXXVIII, so ist offenbar ar : an = al : av = rl : nv.
i ist also auch sin : cos = nv : av.

Das Perpendikel aus na auf B' ist aber offenbar gleich
r Quadratwurzel aus n^2 + dem Quadrate des Perpendikels
s dem Mittelpuncte auf die Kante B' $= (Cv)^2$ Fig. XXXIX. Die
nte B' läuft von a nach ma, Cv ist also $= \frac{aC . mC}{ma} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}.$

so ist nv $= \sqrt{\frac{n^2 (m^2 + 1) + m^2}{m^2 + 1}}$

$$v = \sqrt{(aC)^2 - (vC)^2} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Also ist $\sin : \cos = nv : av = \sqrt{\frac{n^2(m^2+1)+m^2}{m^2+1}} : \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$

$= \sqrt{n^2(m^2+1)+m^2} : 1$, d. h.

$$\text{Tg} \measuredangle \text{ ral} = \frac{\text{Sin}}{\text{Cos}} = \sqrt{n^2(m^2+1)+m^2}.$$

5) Die bekannten Dyakisdodecaëder*) haben folgende Werthe:

für m $\frac{4}{3}$, $\frac{15}{11}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{5}$, 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 4,
„ n 2, $\frac{15}{7}$, 3, $\frac{11}{3}$, 4, 5, 7, 8.

Von den Combinationen des regulären Systems.

§. 36. Die bisher betrachteten einfachen Gestalten kommen in der Natur sehr häufig mit einander combinirt vor, d. h. ein Körper wird von Flächen begränzt, die verschiedenen einfachen Körpern angehören, wie dies §. 11 u. ff. weiter ausgeführt wurde, wo zugleich die Begriffe der herrschenden oder Grundgestalt und der untergeordneten Gestalten weiter entwickelt wurden. Bei den einfachen Gestalten hatten wir überall die 3 Hauptdimensionen für alle von gleicher Länge a = 1 angenommen. Combinationen sind jedoch nur dann möglich, wenn der wirkliche, reelle Werth der verschiedenen zur Combination zusammentretenden Gestalten ein verschiedener ist. Ein Blick auf die Durchschnitte der einfachen Körper (Taf. II, 2), bei denen wir überall die Achsen von

*) Es kann Dyakisdodecaëder geben, in welchen die Kante C' und die Kante B' einander parallel laufen. In diesen muss also $\measuredangle$ tra + rar' (Fig. XXXVII) = 180° sein. Setzt man die Formeln für die beiden Winkel in diese Gleichung, so findet man daraus, dass $n = m^2$ wird, also z. B. das Dyakisdodecaëder ½ [a : 2a : 4a] dieser Bedingung entspricht.

wirklich gleichen Längen angenommen hatten, zeigt die Unmöglichkeit, dass z. B. an dem Würfel irgend eines andern einfachen Körpers Fläche erscheinen könne, wenn nicht sein a in der Wirklichkeit grösser ist, als das des Würfels, und ebenso einleuchtend ist, dass unter der Voraussetzung der Gleichheit der wirklichen Länge der Achsen, die Octaëderfläche nie an einem andern Körper erscheinen kann. Bei gleichen Längen der Achsen ist das Octaëder der kleinste Körper, der Würfel der grösste; bei den übrigen kommt es auf ihre Werthe von m oder n an, welcher grösser ist, d. h. einen grösseren Raum um den Mittelpunct der Construction einschliesst. Der seiner Natur nach, d. h. bei gleich langen Achsen kleinere Körper muss daher, wenn er in Combination mit einem grösseren auftreten soll, stets einen in der Wirklichkeit grösseren Werth seiner Achsen haben, als dieser und umgekehrt. Auf das wirkliche Verhältniss der Längen der Achsen der verschiedenen an einem Körper auftretenden Gestalten kommt es nun an, welche Form die vorherrschende, welche die untergeordnete ist. Jeder Körper des regulären Systems kann bei einer gewissen Länge seiner Achsen jeden anderen, auch den bei gleichen Achsenlängen grössern einschliessen, so dass nur seine Flächen zum Vorschein kommen, und umgekehrt von ihm eingeschlossen werden, wenn nur das Verhältniss der Achsen so ist, das die Fläche des einschliessenden Körpers in dem vom Mittelpuncte entferntesten Punct des andern, ebenso weit von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte entfernt ist. Es lässt sich leicht für 2 Körper berechnen, wie das reale Längenverhältniss ihrer Achsen sein muss, wenn sie sich gegenseitig einschliessen sollen. So ist der vom Mittelpuncte entfernteste Punct des Würfels der Eckpunct in der Dimension t, der bei gleicher Achsenlänge 3 mal so weit vom Mittelpuncte entfernt ist, als der in der Dimension t gelegene Punct des Octaëders, da $\sqrt{3} : \sqrt{\frac{1}{3}} = 3 : 1$. Soll nun dieser

Punct des Würfels in die Octaëderfläche fallen, so muss, wie aus Taf. II. 2 leicht zu ersehen *), die Achse des Octaëders 3 mal so gross sein, als die Achse des eingeschlossenen Würfels.

Je nachdem nun das Verhältniss der Achsen sich gestaltet, je nachdem es sich mehr dem nähert, bei welchem ein Eingeschlossensein des einen Körpers von dem andern oder umgekehrt Statt findet, wird bald die eine, bald die andere Form vorherrschend werden.

Die Achsen selbst fallen bei allen Combinationen stets zusammen und daraus folgt denn auch, dass an allen gleichen Stellen eines Körpers die gleichen Flächen vorkommen, dass die Flächen eines Körpers, der zu einem anderen als Combination hinzutritt, stets in ihrer vollen Zahl erscheinen. Wir können daher mit Leichtigkeit die Zahl der Flächen einer Combination berechnen, wenn wir wissen, welche einfachen Körper zu derselben zusammengetreten sind.

§. 37. Wenn wir jedem im regulären Systeme vorkommenden einfachen Körper eine verschiedene Achsenlänge geben, wie sie nöthig ist, damit er mit einem andern in Combination treten kann, so können wir auf diese Weise einen Körper construiren, an dem alle bisher beobachteten einfachen Gestalten zugleich erscheinen. Ein solcher Körper würde von 818 Flächen begränzt sein. Eine Combination des Flussspathes, die von Phillips an einem Krystall von Devonshire beobachtet wurde, bestände aus 338 Flächen, wenn der Krystall vollkommen frei ausgebildet wäre und ist

*) h, h ist der Durchschnitt des Würfels $\boxed{1a : \infty a : \infty a}$ der das Octaëder $\boxed{1a : 1a : 1a}$ o einschliesst; von diesem wird der Würfel H = $\boxed{\frac{1}{3}a : \infty a : \infty a}$ eingeschlossen, ebenso wie das Octaëder $\boxed{3a : 3a : 3a}$ O u. O der Fig. 2 den Würfel h = $\boxed{1a : \infty a : \infty a}$ einschliesst.

die reichste Combination von Flächen, die bis jetzt angetroffen wurden. In der Regel sind dieselben jedoch viel einfacher und werden von einer geringeren Anzahl einfacher Gestalten gebildet.

Da bei allen Combinationen die Achsen stets zusammenfallen, so haben alle Flächen ihre bestimmten Stellen und Richtungen, in welchen sie allein zum Vorschein kommen können und es lässt sich aus der Beobachtung der Gesetze für die Erscheinung einer Fläche und für die gegenseitige Beschränkung mehrerer zugleich auftretender stets mit Sicherheit bestimmen, welcher Gattung von Körpern eine gewisse Fläche angehöre, ob einem Pyramidenoctaëder oder einem Leucitoëder u. s. w. Die Bestimmung, welcher von den vielen möglichen Körpern dieser Gattungen in einem gegebenen Falle uns vorliege, lässt sich in vielen Fällen nur durch Messungen der Winkel treffen, welche die verschiedenen Flächen mit einander bilden, aus denen wir dann die Werthe von m und n für den speziellen Fall aus den Formeln für die Kanten- oder Neigungswinkel der Flächen der verschiedenen Gattungen der einfachen Körper entwickeln können.

§. 38. Es würde zu weit führen, die grosse Zahl aller möglichen Combinationen und ihre Erscheinungsweise aufzuführen; wir wollen im folgenden nur die hauptsächlichsten Arten derselben erwähnen, aus welchen sich die übrigen dann leicht ableiten lassen. Wir bedienen uns dabei der §. 8 näher erläuterten Ausdrücke von Werner, um die Art und Weise zu bezeichnen, wie eine Form untergeordnet an der andern erscheint, wobei immer vorausgesetzt ist, dass die Gestalt deren Veränderungen wir angeben, als die vorherrschende erscheint. Wie sie untergeordnet an den anderen vorkommt, ist dann bei jeder einzelnen, wo diese als herrschende angenommen ist, nachzusehen. Der leichteren Uebersicht wegen sind im folgenden die häufiger vorkommen-

den Ausdrücke abgekürzt worden. Es ist Abst. = Abstumpfung, Zusch. = Zuschärfung, g. = gerade, Zusp. = Zuspitzung, Kt. = Kante, Fl. = Fläche, E. = Ecke, a. d. Kt., a. d. Fl. aufges., auf die Kanten, auf die Flächen aufgesetzt u. s. w.

Es erscheinen untergeordnet

I. Am Octaëder:

1) als g. Abst. der Kt.	Granatoëderfl. (Fig. 2)
2) als g. Abst. der E.	Würfelfl. (Fig. 5 und 6)
3) als 4fl., a. d. Fl. g. aufges. Zusp. d. E.	Leucitoidfl. (Fig. 13 u. 14)
4) als 4fl. a. d. Kt. g. aufg. Zusp. d. E.	Pyramidenwürfelfl. (Fig. 21)
5) als Zusch. d. Kt.	Pyramidenoctaëderfl. (Fig. 12)
6) als 8fl. Zusp. d. E.	Hexakisoctaëderfl. (Fig. 22)

II. Am Würfel:

1) als g. Abst. d. Kt.	Granatoëderfl. (Fig. 9 u. 10)
2) als g. Abst. d. E.	Octaëderfl. (Fig. 7 und 6)
3) als 3fl. a. d. Fl. g. aufg. Zusp. d. E.	Leucitoidfl. (Fig. 19)
4) als Zusch. der Kt.	Pyramidenwürfelfl. (Fig. 17)
5) als 3fl. a. d. Kt. g. aufg. Zusp. d. E.	Pyramidenoctaëderfl.
6) als 6fläch. Zusp. d. E. . . .	Hexakisoctaëderfl. (Fig. 22)

III. Am Granatoëder:

1) als g. Abst. d. 3ktg. E. . . .	Octaëderfl. (Fig. 3)
2) als g. Abst. d. 4ktg. E. . . .	Würfelfl. (Fig. 10)
3a) als g. Abst. der Kt.	Leucitoëderfl. (Fig. 16)
3b) als 4fl. a. d. Kt. g. aufges. Zusp. der 4kant. E.	Leucitoidfl.
3c) als a. d. Kt. g. aufg. 3fl. Zusp. der 3kant. E.	„
4) als a. d. Fl. g. aufg. 4fl. Zusp. der 4kant. E.	Pyramidenwürfelfl.
5) als a. d. Fl. g. aufg. 3fl. Zusp. der 3kant. E.	Pyramidenoctaëderfl.
6a) als Zusch. der Kt.	Hexakisoctaëderfl.
6b) als 8fl. Zusp. der 4ktg. E. .	„
6c) als 6fl. Zusp. der 3ktg. E. .	„

IV. An Leucitoiden:

s g. Abst. der 3ktg. E.	Octaëderfl. (Fig. 14)
s g. Abst. der 4ktg. E.	Würfelfl.
s g. Abst. d. 2 und 2ktg. E. . . .	Granatoëderfl. (Fig. 16)
ils g. a. d. Fl. aufg. 4fl. Zusp. d. 4ktg. E.	stumpfere Leucitoidfl.
ils g. a. d. Fl. aufg. 3fl. Zusp. d. 3kt. E.	spitzere Leucitoidfl.
ls g. Abst. d. Kt. A	Pyramidenwürfelfl.
ils g. a. d. Kt. aufg. 4fl. Zusp. d. 4kt. E.	„
ls Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt. A aufg.	„
ls g. Abst. der Kt. B	Pyramidenoctaëderfl.
ils Zusch. d. 2 u. 2ktg. E. a. d. Kt. B aufg.	„
ls 3fl. a. d. Kt. aufg. Zusp. d. 3ktg. E.	„
ls Zusch. d. Kt. A	Hexakisoctaëderfl.
ls Zusch. d. Kt. B	„
ls 8fl. Zusp. d. 6 4ktg. E. . . .	„
ls 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 12 2 u. 2k. E.	„
ls 6fl. Zusp. d. 8 3ktg. E.	„

V. An Pyramidenwürfeln:

s g. Abst. d. 3 u. 3ktg. E. . . .	Octaëderfl.
ls g. Abst. d. 4ktg. E.	Würfelfl.
ls g. Abst. d. Kt. B	Granatoëderfl.
ils g. Abst. d. Kt. A	Leucitoidfl.
ils 3fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E.	„
ls 4fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. 4ktg. E.	„
ls Zusch. d. Kt. B	Pyramidenwürfelfl.
ls 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 4ktg. E.	„
s 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. 3 u. 3ktg. E.	Pyramidenoctaëderfl.
ls Zusch. d. Kt. A	Hexakisoctaëderfl.
ls 8fl. Zusp. d. 4ktg. E.	„
ls 6fl. Zusp. d. 3 u. 3ktg. E. . . .	„

I. An Pyramidenoctaëderflächen:

g. Abst. d. 3ktg. E.	Octaëderfl.
g. Abst. d. 4 u. 4ktg. E. . . .	Würfelfl.
g. Abst. d. Kt. A	Granatoëderfl.
s g. Abst. d. Kt. C	Leucitoidfl.
s 4fl. a. d. Kt. C aufg. Zusp. d. 4 u. 4kt. E.	„
3fl. a. d. Kt. C aufg. Zusp. d. 3ktg. E.	„

5) als 4fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. 4 u. 4kt. E. Pyramidenwürfelfl.
6a) als Zusch. d. Kt. A . . . . Pyramidenoctaëderfl.
6b) als 3fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 3ktg. E. "
7a) als Zusch. d. Kt. C . . . . Hexakisoctaëderfl.
7b) als 8fl. Zusp. d. 4 u. 4ktg. E. . . . "
7c) als 6fl. Zusp. d. 3kt. E. . . . . . . "

VII. An Hexakisoctaëdern:

1) als g. Abst. d. 3 u. 3ktg. E. . . . . Octaëderfl.
2) als g. Abst. d. 4 u. 4ktg. E. . . . . Würfelfl.
3) als g. Abst. d. 2 u. 2kt. E. . . . . Granatoëderfl.
4a) als g. Abst. d. Kt. C . . . . Leucitoidfl.
4b) als 4fl. a. d. Kt. C aufg. Zusp. d. 4 u. 4kt. E. "
4c) als 3fl. a. d. Kt. C aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E. "
5a) als g. Abst. d. Kt. A . . . . Pyramidenwürfelfl.
5b) als 4fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. 4 u. 4kt. E. "
5c) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt A aufg. "
6a) als g. Abst. d. Kt. B . . . . Pyramidenoctaëderfl.
6b) als 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E. "
6c) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt. B aufg. "
7a) als Zusch. d. Kt. A, B und C . . . Hexakisoctaëderfl.
7b) als 8fl. Zusp. d. 4 u. 4ktg. E. . . . . "
7c) als 6fl. Zusp. der 3 und 3ktg. E. . . "
7d) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 2 u. 2ktg. E. "

§. 39. Es würde zu weit führen, für alle diese Fälle die Bedingungen anzuführen, unter welchen die verschiedenen Arten von Combinationen verschiedener Körper einer Gattung an einem anderen auftreten, z. B. unter welchen Bedingungen eine Pyramidenwürfelfläche als Zuschärfung der 2 und 2kantigen Ecke des Hexakisoctaëders und wann sie als gerade Abstumpfung der Kanten A an einem Hexakisoctaëder erscheine. Wegen der grossen Wichtigkeit jedoch, welche diese verschiedene Erscheinungsweise der verschiedenen Körper ein und derselben Gattung, in dem angeführten Falle der Pyramidenwürfel, an einem anderen für die Bestimmung der Werthe derselben hat, d. h. zur Bestimmung, mit welcher Species aus der Gattung wir es zu thun haben, wollen wir

die Bedingungen entwickeln, unter welchen die verschiedenen Arten einer Gattung von Körpern an den Hexakisoctaëdern auf verschiedene Weise erscheinen.

Wir haben schon erwähnt, dass nur bei wirklicher Verschiedenheit in den Werthen der für jeden Körper als Einheit des Maases angenommenen Dimensionen a eine Combination verschiedener Gestalten zu Wege kommen könne. Da aber in dem Verhältniss der Werthe eines Körpers nichts geändert wird, ob wir die Achsen sämmtlich uns länger oder kürzer denken, da die Lage der Flächen unverändert dieselbe bleibt, welche Werthe auch in der Wirklichkeit den Achsen zukommen, so denken wir uns bei der Entwicklung der Bedingungen der Combinationen auch die Werthe der Achsen in den verschiedenen Körpern gleich lang, und betrachten alsdann wie die Flächen des einen Körpers im Verhältniss zu denen des andern zu liegen kommen. Wir denken uns also einen Körper so in dem andern liegend, dass die Hauptachsen a von gleicher Länge seien und für beide Körper zusammenfallen, wobei dann auch die Dimensionen t und s zusammenfallen müssen. Unter dieser Voraussetzung der gleichen Länge der Dimension 1 a und in dieser Stellung wird es daher nur von der Grösse, d. h. dem Werthe der Dimensionen s und t abhängen, wie die Lage der Flächen eines Körpers gegen die des anderen sind. Im folgenden sind überall die Werthe desjenigen Körpers, der untergeordnet am Hexakisoctaëder erscheint, mit accentuirten Buchstaben bezeichnet, die des Hexakisoctaëders selbst ohne Accente geschrieben. Wir betrachten die Bedingungen, unter welchen die verschiedenen Körper einer Gattung sich allgemein an Hexakisoctaëdern zeigen in derselben Ordnung, wie sie pag. 120 unter VII aufgeführt wurden. Da es jedoch nur ein Octaëder, nur einen Würfel, nur ein Granatoëder giebt, die sich immer als gerade Abstumpfung der dreierlei Ecken der Hexakisoctaëder zeigen, so können wir diese Körper füglich übergehen.

Es erscheinen am Hexakisoctaëder $[a : ma : na]$

1) die Flächen der Leucitoide $[a : m'a : m'a]$

a) als gerade Abstumpfung der Kanten C, die Kante C muss in diesem Falle mit der Längsdiagonale der Leucitoidfläche zusammenfallen.

Die Kante C des Hexakisoctaëders läuft von a nach $\frac{2mn}{m+n}s$, die Diagonale der Leucitoide von a nach $m's$. Sollen nun die beiden Linien gleich werden *), so muss offenbar $\frac{2mns}{m+n} = m's$, $\frac{2mn}{m+n} = m'$ sein; für das Hexakisoctaëder $[a : \frac{3}{2}a : 3a]$ wird $m' = 2$, also die gerade Abstumpfung der Kanten C des erwähnten Hexakisoctaëders giebt das gewöhnliche Leucitoid;

b) als 4flächige auf die Kanten C aufgesetzte Zuspitzung der 4 und 4kantigen Ecken, wenn die Dimension t' am Leucitoide $>$ als die des Hexakisoctaëders d. h. $\frac{2mn}{m+n} < m'$ im umgekehrten Falle, wenn $t' < t$ erscheint sie

c) als 3flächige auf dieselben Kanten C aufgesetzte Zuspitzung der 3 und 3kantigen Ecken; die Combinationskanten laufen im Falle b parallel der Kante B d. h. die Kanten B des Leucitoides laufen wie die Kanten B des Hexakisoctaëders, oder dieses erscheint an den Kanten des Leucitoides als Zuschärfung seiner

*) Die Diagonale des Leucitoides ist wie die Kante C des Hexakisoctaëders nur zwischen a und t' Begränzung, sind aber diese beiden Stücke bei beiden gleich lang, so müssen auch die zwischen t' und der Dimension s' liegenden, von den übrigen Flächen abgeschnittenen Stücke d. h. die ganzen Linien zwischen a und s' gleich sein.

Kanten B, wenn $\frac{2m}{m+1} : n = \frac{2m'}{m'+1} : m'$*) also (A 3)

$$m' + 1 = \frac{n(m+1)}{m}$$

für das Hexakisoctaëder $\boxed{3a : \frac{3}{2}a : a}$ wird $m' = 4$,

und für das $\boxed{4a : 2a : a}$ $m' = 3$.

Im Falle c laufen die Combinationskanten parallel den Kanten A, wenn $m = m'$.

2) **Die Pyramidenwürfelflächen** $\boxed{a : m'a : \infty a}$

a) als gerade Abstumpfung der Kanten A, wenn $m' = m$

b) als 4flächige Zuspitzung der 4 und 4kantigen Ecke, wenn $m' > m$

c) als Zuschärfung der 2 und 2kantigen Ecke auf die Kante A aufgesetzt, wenn $m' < m$, und zwar laufen im Falle c die Combinationskanten parallel den Kanten C, wenn die Kanten des Pyramidenwürfels gleich laufen wie die Kanten des Hexakisoctaëders, wenn also $a : 2m's = a : \frac{2mn}{m+n} s$

$$m' = \frac{mn}{m+n}$$

für das Hexakisoctaëder $\boxed{a : 2a : 4a}$ wird $m' = \frac{4}{3}$.

3) **Die Pyramidenoctaëderflächen** $\boxed{a : a : n'a}$

a) als gerade Abstumpfung der Kante B

$$\text{wenn } s : n' = \frac{2ms}{m+1} : n$$

$$n' = \frac{(m+1)n}{2m}$$

---

*) Die Kante B des Hexakisoctaëders läuft ja von $\frac{2m}{m+1}$ s nach na, die des Leucitoides von $\frac{2m}{m+1}$ s nach ma.

am Hexakisoctaëder $\boxed{a : 2a : 4a}$ erscheint so das Pyramidenoctaëder $\boxed{a : a : \frac{4}{3} a}$

b) als 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. der 3 und 3ktg. E.

$$\text{wenn } n < \frac{(m+1)\,n}{2\,m}$$

c) als Zusch. d. 2 und 2kt. E. a. d. Kt. B aufg.

$$\text{wenn } n > \frac{(m+1)\,n}{2\,m}$$

die Combinationskanten laufen parallel den Kanten C,

$$\text{wenn } \frac{2\,n's}{n'+1} : a = \frac{2\,m\,n}{m+n}\,s : a$$

$$\frac{n'}{n'+1} = \frac{m\,n}{m+n}.$$

4) Die Hexakisoctaëderflächen $\boxed{a : m'a : n'a}$

a) als Zusch. der Kt. A

$$\text{wenn } \begin{matrix} m' = m \text{ und} \\ n' > n \end{matrix}$$

b) als Zusch. der Kt. B,

$$\text{wenn } \frac{2\,m'}{m'+1} : n' = \frac{2\,m}{m+1} : n$$

$$\frac{n'(m'+1)}{m'} = \frac{n\,(m+1)}{m} \text{ und } m' > m.$$

Dies Verhältniss findet zwischen keinem Paare der bekannten Hexakisoctaëder Statt;

c) als Zusch. der Kt. C,

$$\text{wenn } \frac{2\,m'n'}{m'+n'} : a = \frac{2\,m\,n}{m+n} : a$$

$$\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{m\,n}{m+n} \text{ und } m' > m.$$

Auch für dieses Verhältniss finden sich keine bekannten Beispiele von Hexakisoctaëdern;

d) als 8fl. Zusp. der 4 und 4ktg. E.

$$\text{wenn } \frac{2\,m}{m'+1} > \frac{2\,m}{m+1} \text{ und } \frac{2\,m'n'}{m'+n'} > \frac{2\,m\,n}{m+n}$$

und zwar sind die Combinationskanten parallel den Kanten B, wenn

$$\frac{2m'}{m'+1} : n' = \frac{2m}{m+1} : n ; \frac{n'(m'+1)}{m'} = \frac{n(m+1)}{m'}$$

e) als 6fl. Zusp. der 3 und 3ktg. E.

$$\text{wenn } \frac{2m'n'}{m'+n} : a < \frac{2mn}{m+n} : a$$

$$\frac{m'n'}{m'+n'} < \frac{mn}{m+n}.$$

Die Combinationskanten laufen parallel den Kt. A, wenn $m' = m$;

f) als 4fl. auf d. Fl. aufges. Zusp. der 2 u. 2ktg. E. wenn $m' < m$.

Die Combinationskanten laufen parallel den Kanten C,

$$\text{wenn } \frac{2m'n'}{m'+n'} : a = \frac{2mn}{m+n} : a$$

$$\frac{m'n'}{m'+n} = \frac{mn}{m+n}.$$

Die Combinationsbedingungen für die übrigen Körper findet man leicht aus den Bedingungs-Gleichungen für die Erscheinungsweisen der verschiedenen Körper an Hexakisoctaëdern, wenn man die entsprechenden Werthe derselben statt für m und n der des Hexakisoctaëders, das wir oben als Grundgestalt angenommen haben, setzt, indem dann die angeführten Formeln ihre volle Gültigkeit behalten.

Combinationen der hemiedrischen Gestalten.

§. 40. Bei diesen Combinationen sind dreierlei verschiedene Arten von Combinationen zu beobachten. Es können nehmlich:

1) hemiedrische Gestalten mit homoedrischen in Combination treten,
2) hemiedrische Formen, die als rechte oder linke Hälfte

eines Körpers erscheinen mit den gleich gelegenen Hälften eines anderen hemiedrischen Körpers oder

3) mit den ungleich gelegenen Hälften eines anderen Körpers, also rechte Hälften mit linken anderer Gestalten und umgekehrt.

Wir wollen die gleich gelegenen Hälften mit + die ungleich gelegenen mit — bezeichnen, um sie von einander in den Combinationen unterscheiden zu können.

A. Combinationen der geneigtflächig hemiedrischen Gestalten.

1) Am Tetraëder $\frac{1}{2}$ | a : a : a | erscheinen

1a) als Abst. der E. . . .	—	Tetraëderfl. (Fig. 28)
1b) als Abst. der Kt.		Würfelfl. (Fig. 29)
2) als 3fl. a. d. Fl. aufges. Zusp. d. E.		Granatoëderfl. (Fig. 31)
3a) als Zusch. der Kt.	+	Pyramidentetraëderfl. (Fig. 34)
3b) als a. d. Kt. aufg. 3fl. Zusp. d. E.	—	„ (Fig. 50 r)
4) als 6fl. Zusp. der E. . . .		Pyramidenwürfelfl. (Fig. 50 s)
5a) als stumpf. 3fl. a. d. Fl. aufges. Zusp. d. E.	+	Trapezoidfl.
5b) als spitzere 3fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. E.	—	„
6a) als spitzere 6fl. Zusp. d. E.	+	Hexakistetraëderfl.
6b) als stumpfere 6fl. Zusp. d. E.	—	„

2) Am Pyramidentetraëder $\frac{1}{2}$ | a : ma : ma |

1a) als Abst. der 3ktg. E. . . .	+	Tetraëderfl.
1b) als Abst. der 3 und 3ktg. E.	—	„
2) als Abst. der Kt. A		Würfelfl.
3) als 3fl. a. d. Kt. B aufges. Zusp. der 3 und 3ktg. E. . . .		Granatoëderfl.
4a) als Zusch. d. Kt. A . . .	+	Pyramidentetraëderfl.
4b) als 3fl. a. d. Fl. aufges. Zusp. d. 3ktg. E.	+	„
4c) als 3fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. 3 u. 3ktg. E.	—	„
5) als 6fl. Zusp. der 3 u. 3ktg. E.		Pyramidenwürfelfl.

6a) als g. Abst. d. Kt. B . . . . . . +Trapezoiddodecaëderfl.
6b) als 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. 3kt. E. + „
6c) als 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E. + „
6d) als 3fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E. — „
7a) als Zusch. der Kt. B . . . . . . +Hexakistetraëderfl.
7b) als 6fl. Zusp. der 3 u. 3ktg. E. . . + „
7c) als 6fl. Zusp. d. 3ktg. E. . . . . . + „
7d) als 6fl. Zusp. d. 3ktg. E. . . . . . — „

3) Am Trapezoiddodecaëder ½ [a : a : na]

1a) als Abst. d. von den Kt. A′ gebild. 3kt. E. +Octaëderfl.
1b) als Abst. d. von den Kt. C′ gebild. 3kt. E. — „
2) als g. Abst. der 2 und 2ktg. E. . . Würfelfl.
3) als 3fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. v. d. Kt. A geb. E. Granatoëderfl.
4a) als g. Abst. der Kt. C′ . . . . . . +Pyramidentetraëderfl.
4b) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt. C′ aufg. + „
4c) als 3fl. a. d. Kt. C′ aufg. Zusp. d. v. C geb. E. + „
4d) als g. Abst. d. Kt. A′ . . . . — „
4e) als Zusch. d. 2 u. 2ktg. E. a. d. Kt. A′ aufg. — „
4f) als 3fl. a. d. Kt. A′ aufg. Zusp. d. 3kt. E. — „
5a) als Zusch. der Kt. A′ . . . . . . Pyramidenwürfelfl.
5b) als 4fl. Zusp. d. 2 u. 2ktg. E. . . . „
5c) als 6fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. v. d. Kt. A gebild. 3ktg. E . . . . „
6a) als a. d. Fl. aufg. 3fl. Zusp. der beiderlei 3ktg. E . . . . +Trapezoiddodecaëderfl.
6b) als a. d. Fl. aufg. 3fl. Zusp. d. v. d. Kt. A gebild. E. . . . . — „
7a) als Zusch. der Kt. A u. C . . . . +Hexakistetraëderfl.
7b) als 6fl. Zusp. d. v. d. Kt. A gebild. E. + „
7c) als 6fl. Zusp. d. v. d. Kt. C gebild. E. + „
7d) als 4fl. Zusp. d. 2 u. 2ktg. E. . . + „
7e) als 4fl. Zusp. d. 2 u. 2ktg. E. . . . . — „
7f) als Zusch. d. Kt. A . . . . . . — „
7g) als 6fl. Zusp. d. v. d. Kt. A gebild. E. — „

4) Am Hexakistetraëder:

1a) als Abst. d. 3 u. 3ktg. E. v. d. Kt. A′ und B′ gebild. . . . . +Tetraëderfl.

1b) als Abst. d. 3 u. 3kt. E. v. d. Kt. B' u. C'	—	Tetraëderfl.
2) als Abst. der 2 u. 2ktg. E. . . .		Würfelfl.
3) als 3fl. a. d. Kt. B' aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E.		Granatoëderfl.
4a) als Abst. der Kt. C'	+	Pyramidentetraëderfl.
4b) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt. C' aufg.	+	„
4c) als 3fl. a. d. Kt. C aufg. Zusp. d. 3 u. 3kt. E.	+	„
4d) als Abst. d. Kt. A'	—	„
4e) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. a. d. Kt. A' aufg.	—	„
4f) als 3fl. Zusp. der 3 u. 3ktg. E. . .	—	„
5a) als Zusch. der Kt. A'		Pyramidenwürfelfl.
5b) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 2 u. 2kt. E.		„
5c) als 6fl. der sp. 3 u. 3kt. E. d. Kt. A' u. B'		„
6a) als Abst. der Kt. B'	+	Trapezoiddodecaëderfl.
6b) als 3fl. a. d. Kt. B' aufg. Zusp. d. spitz. 3 u. 3kg. E.	+	„
6c) als 3fl. a. d. Kt. B' aufg. Zusp. d. stumpf. 3 und 3ktg. E.	+	„
6d) als 3fl. a. d. Kt. B' aufg. Zusp. d. spitz. 3 u. 3ktg. E.	—	„
7a) als Zusch. d. Kt. A', B' u. C' . .	+	Hexakistetraëderfl.
7b) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. 2 u. 2kt. E.	+	„
7c) als 6fl. Zusp. der spitz. 3 u. 3ktg. E.	+	„
7d) als 6fl. Zusp. der stumpf. 3 u. 3kt. E.	+	„
7e) als 6fl. Zusp. der spitz. 3 u. 3ktg. E.	—	„
7f) als Zusch. der Kt. A'	—	„
7g) als Zusp. der 2 und 2ktg. E. . .	—	„

Die Combinationsbedingungen, unter welchen die verschiedenen Erscheinungsweisen der verschiedenen Species einer Gattung von Körpern eintreten, sind ganz dieselben wie bei den homoedrischen Körpern, wenn die Combinationen als Veränderungen an Begränzungs - Elementen auftreten, welche dem homoedrischen und dem hemiedrischen Körper in gleicher Weise zukommen. Die Art der Veränderung, welche sie mit dem Eintreten neuer Begränzungs-Elemente an den hemiedrischen Körpern erleiden, ist in jedem speziellen Falle leicht zu finden.

§. 41. *B. Combinationen der parallelflächigen hemiedrischen Gestalten.*

Es erscheinen

1) Am Pentagondodecaëder $\frac{1}{2}$ [a : m : ∞ a]

1) als g. Abst. der 3ktg. E.		Octaëderfl.*) (Taf. IV, Fig. 48)
2) als g. Abst. der Grundkt. A' . .		Würfelfl. (Fig. 40)
3) als Abst. der 2 u. 1ktg. E. . . .		Granatoëderfl.
4a) als Abst. der Kt. B'		Leucitoidfl.
4b) als Zusp. d. 3kt. E. schief a. d. Kt. B' ges.		„
4c) als Zusch. der 2 u. 1ktg. E. in den Winkel zw. A' u. B' gesetzt .		„
5a) als Zusch. der Kt. A'	+	Pentagondodecaëderfl.
5b) als Abst. d. 2 u. 1ktg. E. (mehr von der Fl. abschneidend)	+	„
5c) als Abst. d. 2 u. 1ktg. E. (mehr von der Kante A' abschneidend) .	—	„
6a) als schiefe Abst. der Kt. B' . .		Pyramidenoctaëderfl.
6b) als 3fl. Zusp. d. 3kt. E. (schief aufg.)		„
6c) als Zusch. d. 2 u. 1ktg. E. (schief an der Kante B' aufgesetzt) .		„
7a) als schiefe Abst. der Kante B' .	+	Dyakisdodecaëderfl.
7b) als Zusch. d. 2 u. 1kt. E. (zw. A' u. B' aufgesetzt)	+	„
7c) als 3fl. Zusp. d. 3ktg. E. d. Zusch. Fl. aufgesetzt		„ (Fig. 49)
α) gerade a. d. Fl.	+	„
β) schief a. d. eine Kt. B' .	+	„
γ) schief a. d. andere Kt. B'	+	„

---

*) Geht die Abstumpfung bis zu den 2- und 1kantigen Ecken, so entsteht ein von 8 gleichseitigen und 12 gleichschenkligen Dreiecken begränzter Körper (Taf. IV. 44), der grosse Aehnlichkeit mit dem regelmässigen Icosaëder der Geometrie hat, in der Natur aber nicht vorkommt, da m für dasselbe den Werth $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ bekäme, der wie alle irrationalen aus der Krystallographie ausgeschlossen ist.

7d) als schiefe Abst. (nach d. entgegenges. Seite die Abst. Fl. mehr geneigt als bei a) . . . . — Dyakisdodecaëderfl.
7e) wie Cβ, aber ebenfalls nach der andern Seite hin schief aufges. (wie dort) . . . . — „
7f) wie b auch nach der entgegengesetzten Seite schief . . . . . — „

2) Am Dyakisdodecaëder:

1) als Abst. der 3ktg. E. an t' . . . Octaëderfl.
2) als Abst. der 2 u. 2ktg. E. an a' . Würfelfl. (Fig. 48.)
3) als Abst. d. unregelm. 2, 1 u. 1ktg. E. Granatoëderfl.
4a) als 3fl. schief a. d. Fl. aufg. Zusp. der 3ktg. E. . . . . Leucitoidfl.
4b) als 4fl. Zusp. der 2 u. 2ktg. E. . „
4c) als Zusch. der Kt. A' . . . . „
4d) als Zusch. d. unregelm. E. aufg. auf d. Fl. zw. A' u. C' . . . . . „
4e) als schiefe Abst. der Kt. C', d. Abst. Fl. auf A' aufg. . . . . . . „
5a) als g. Abst. der Kt. B' . . . . + Pentagondodecaëderfl.
5b) als Zusch. d. 2 u. 2kt. E. auf B' aufg. + „
5c) als Abst. der unregelm. E. auf B' aufgesetzt . . . . + „
5d) als Abst. der unregelm. E. a. A' aufgesetzt . . . . — Pendagondodecaëderfl
5e) als Zusch. d. 2 u. 2ktg. E. . . . — „
5f) als ger. Abst. d. Kt. A' . . . . — „
6a) als schiefe Abst. der Kt. C' . . . Pyramidenoctaëderfl.
6b) als Zusch. der unregelm. E. schief auf C' aufges. . . . . „
6c) als 3fläch. Zusp. der 3ktg. E. schief auf C' aufges. . . . . „
7a) als Zusch. der Kt. A' und B' . . + Dyakisdodecaëderfl.
7b) als schiefe Abst. der Kt. C' α) auf A', β) auf B' aufges. . . + „
7c) als 4fläch. Zusp. der 2 und 2ktg. E. + „

7d) als 3fläch. Zusp. der 3ktg. E. aufges. α) ger. a. d. Fl., β) schief a. d. Kt. C' γ) schief a. d. Kt. C'	+	Dyakisdodecaëderfl.
7e) als Zusch. der unregelm. E. aufges. α) auf A' und C', β) auf B' und C'	+	„
7f) als Zusch. der Kt. A'	—	„
7g) als schief a. d. Kt. A' ges. Abst. d. Kt. C'	—	„
7h) als 4fläch. Zusp. der 2 und 2ktg. E.	—	„
7i) als schiefe an die Kt. C', ges. 3fläch. Zusp. der 3ktg. E.	—	„
7k) als Zusch. d. unregelm. E. aufg. a. A' u. B'	—	„

§. 42. *C. Combinationen homoedrischer mit hemiedrischen Gestalten.*

Auch hier müssen wir zweierlei Arten unterscheiden, nehmlich die Combination geneigtflächig hemiedrischer Gestalten und die parallelflächig hemiedrischer mit homoedrischen Formen. Die Erscheinungsweise dieser 2 Arten von Combinationen bedarf ebenfalls keiner ausführlichen Erörterung. Bei der geneigtflächigen Hemiedrie, sahen wir, erleiden die abwechselnden Octanten gleiche Veränderungen. Die Erscheinungsweise einer derartigen hemiedrischen Gestalt an einer homoedrischen wird daher in dem Octanten, wo die hemiedrischen Combinationsflächen sich einstellen, nur wenig abweichen von der, welche bei einer homoedrischen Ausbildungsweise derselben Flächen sich zeigt; die Abweichung von der Gestalt und den Werthen der Begränzungselemente der letzteren wird nur dadurch bedingt, dass die Flächen der Grundgestalt in dem benachbarten Raumoctanten mit den hinzutretenden hemiedrischen Combinationsflächen derjenigen, in welchem diese auftreten, hie und da zum Schneiden kommen werden, wenn dieselben nehmlich so gross werden, dass sie die Gränzen des nächsten Octanten erreichen oder an Begränzungselementen auftreten, welche 2 oder mehreren Octanten zugleich angehören, oder dass sie die durch das

homoedrische Auftreten bedingten Veränderungen nur an der Hälfte der Stellen erleiden, an denen sie diese hervorruft. Dasselbe gilt natürlich auch bei der parallelflächigen Hemiedrie für die abwechselnden Sesquiquadranten. Würde z. B. von einer homoedrisch auftretenden Combination eine zwischen verschiedenen Octanten oder Sesquiquadranten liegende Kante zugeschärft, oder eine solche Ecke von 4 Flächen zugespitzt, so wird bei der hemiedrischen Ausbildungsweise der Combinationsflächen die Kante schief abgestumpft, das Eck zugeschärft erscheinen. Es erscheinen daher am Würfel die Tetraëder und Pyramidentetraëderflächen als Abstumpfung oder Zuspitzung nur an der Hälfte seiner Ecken (Taf. IV, Fig. 30), am Octaëder oder Leucitoid die 4kantige Ecke von den Flächen des Pentagondodecaëders zugeschärft (Taf. IV, Fig. 45), die von den Flächen des Pyramidenwürfels 4flächig zugespitzt wird (Taf. II, Fig. 21). Ebenso erscheint von derselben die Kante des Würfels schief abgestumpft (Taf. IV, Fig. 40), während sie von den Flächen des Pyramidenwürfels als zugeschärft sich zeigt (Taf. II, Fig. 17). Es kommen aber an homoedrischen Körpern hemiedrische Combinationen auf folgende 4 Arten vor:

1) Der homoedrische Körper ist überhaupt nicht der Hemiedrie fähig: Würfel und Granatoëder.

   Es können daher an diesen beiden Körpern alle hemiedrischen Körper in Combination auftreten, jedoch entweder nur parallelflächige, oder nur geneigtflächige, nie von beiden Arten zusammen.

2) Der homoedrische Körper ist nur einer Art, und zwar der geneigtflächigen Hemiedrie fähig: Octaëder, Leucitoide, Pyramidenoctaëder.

   Es erscheinen an diesen von hemiedrischen Körpern nur Flächen parallelflächig hemiedrischer Gestalten, also nur Pentagondodecaëder oder Dyakisdodecaëder.

3) Der homoedrische Körper ist nur der parallelflächigen Hemiedrie fähig: Pyramidenwürfel.

Es erscheinen an ihm hemiedrisch nur der geneigtflächigen Hemiedrie anheimfallende Körper.

4) Der homoedrische Körper ist beiderlei Arten von Hemiedrie fähig: Hexakisoctaëder.

Es können daher auch beide Arten hemiedrischer Formen an Hexakisoctaëdern vorkommen.

Zonen.

§. 43. Aus der Lage der einzelnen Flächen, sowie aus der Zahl, in der sich dieselben an einer Combination zeigen, wird man in allen Fällen bestimmen können, welchem einfachen Körper eine gewisse Fläche angehört, wenn man nach den (p. 80) angegebenen Merkmalen zuerst darüber ins Reine gekommen ist, ob die Flächen einer Combination hemiedrisch oder homoedrisch auftretende sind. Noch mehr wird uns diese Bestimmung erleichtert, ja es wird uns in vielen Fällen sogar möglich, den bestimmten Körper zu ermitteln, die species von einer der artenreichen Gattungen zu bestimmen, mit welchen wir es zu thun haben, wenn wir die Zonenverhältnisse ins Auge fassen, die sich uns bei der Betrachtung eines zusammengesetzten Körpers darbieten.

Was man unter Zonen und Zonenachsen zu verstehen hat, wurde bereits (pag. 13) entwickelt. Wir wenden uns daher sogleich zur Betrachtung der wichtigsten Zonen, die sich im regulären Systeme zur Bestimmung der Flächen annehmen lassen, und bezeichnen die Achse der Zone in ähnlicher Weise, wie unsere Flächen, indem wir hier die Richtung dieser Linie, oder 2 Puncte angeben, durch welche die Zonenachse läuft. Wir werden dabei zugleich die Vortheile gewahr, welche die von Weiss eingeführte Bezeichnung *)

---

*) Besonders deutlich tritt dieses hervor, wenn man die Werthe unserer Dimensionen s, wie sie von irgend einer Fläche ge-

der Flächen uns bietet, indem sich meist unmittelbar aus dem Zeichen der Flächen zu erkennen giebt, welchen Zonen die bezeichnete Fläche angehört.

1) Kantenzone des Octaëders, Zonenachse (a ; a) oder (∞ s). Es gehören in diese Zone alle Flächen, in deren Zeichen das Verhältniss (a : a) enthalten ist; also auch alle, die 2 Dimensionen a mit gleichen Coëfficienten haben, da eine Linie von ma nach ma parallel einer von a nach a, parallel der Dimension s ist, also die Flächen

1) des Octaëders . . . . . [a : a : a]

2) des Würfels . . . . . . [a : ∞ a : ∞ a]

3) des Granatoëders . . . [a : a : ∞ a]

4) der Leucitoide . . . . . [a : ma : ma]

5) der Pyramidenoctaëder [a : a : na].

Es giebt 6 solche Zonen, da immer je 2 der 12 Kanten des Octaëders einander parallel laufen, und immer je 2 der 12 Dimensionen s in einer geraden Linie liegen, die Octaëderfläche selbst gehört in 3 solche Zonen, die Würfelfläche fällt zugleich in 2 solche Zonen, die übrigen in je eine.

2) Kantenzone des Würfels; Zonenachse (∞ a).

Da es 3 verschieden gelegene Dimensionen a giebt, so giebt es auch 3 solcher Zonen. Es gehören in dieselben die Flächen

1) des Würfels . . . . . [a : ∞ a : ∞ a]

2) der Pyramidenwürfel [a : ma : ∞ a]

3) des Granatoëders . . [a : a : ∞ a].

Die Würfelfläche allein gehört auch hier 2 solchen Zonen an.

---

schnitten werden, im Zeichen mit angiebt, wie dieses von Weiss in seiner Abhandlung: „Ueber eine ausführliche Bezeichnung der Krystallflächen des sphäroedrischen Systems.“ Abh. d. Bresl. Ac. 1818 — 19 ausführlich geschehen ist, auf die wir den Leser verweisen müssen.

3) Kantenzone des Granatoëders; Zonenachse (a; 2s).

Die Kante des Granatoëders läuft, wie wir pag. 34 sahen, von a nach 2s. Wir müssen daher bei den Flächen der verschiedenen Körper, wenn sie in diese Zone gehören sollen, finden, dass das Verhältniss von a : s', das sich bei ihnen findet, ist = a : 2s. Es gehören hierher die Flächen

1) des Granatoëders . . $\boxed{a : a : \infty a}$

2) des Leucitoëders . . $\boxed{a : 2a : 2a}$.

Da die Fläche zwischen ma und ma, ms abschneidet, hier = 2s,

3) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{3}{2}a : 3a}$

4) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{4}{3}a : 4a}$.

Die Hexakisoctaëderfläche, die durch a gelegt wird, schneidet zwischen ma und na (pag. 67) von s ein Stück $\frac{2mn}{n+m}s$ ab. Soll sie nun in unsere Zone gehören, so muss sein $\frac{2mns}{m+n} = 2s$, also $mn = m + n$, woraus $n = \frac{m}{m-1}$ $m = \frac{n}{n-1}$. Dieser Bedingung entsprechen von den bekannten Hexakisoctaëdern nur die beiden bezeichneten. Taf. II, 24 zeigt die 3 ersten dieser Zone angehörigen Körper mit einander combinirt.

4) Diagonalzone des Octaëders; Zonenachse (a; s).

Es giebt 12 solcher Zonen, da die 8 Flächen des Octaëders 24 Diagonalen haben, von denen immer je 2 parallel laufen. Es muss also bei allen Flächen, die in diese Zone gehören sollen, die Linie, welche dieselben zwischen einer Dimension a' und s' bilden, sich verhalten = s : a. Weder das Granatoëder, noch der Würfel, noch das Pyramidenoctaëder können in diese Zone gehören, da bei diesen das Verhältniss von dem $s' : a' > s : a$.

Es gehört hierher die Fläche

1) des Leucitoides . . . $\boxed{a : \frac{3}{2}a : 3a}$

2) des Pyramidenwürfels $\boxed{a : 2a : \infty a}$

3) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{3}{2}a : 3a}$

4) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{11}{5} : \frac{11}{3} a}$

5) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : 2a : 4a}$

6) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{7}{3}a : 7a}$

7) des Hexakisoctaëders $\boxed{a : \frac{5}{3} : 5a}$.

Beweis: 1) Denken wir uns die Fläche des Leucitoides $\boxed{a : 3a : 3a}$ statt durch 1 a durch $\frac{1}{3}$a gelegt (Fig. XLII wie die Linien a·l und a'l'), so schneidet sie die beiden andern a in der Einheit. Wenn sie nun wirklich in die Diagonalzone gehören soll, so muss sie die beiden benachbarten Flächen in der Richtung der Diagonale a·l und a'l schneiden, also die Kanten zwischen den benachbarten und der ihr an derselben Achse $\frac{1}{3}$a gegenüberliegenden Fläche (ag und ah Fig. XLII) halbiren. Es sei nun Fig. XLI der Durchschnitt des Octaëders durch die Dimensionen a, s und t; die Linie s d = s d Fig. XLII gehe durch $\frac{1}{3}$a von s, so ist offenbar nach der Formel $x : y = Na : M(a + b)$

$$ad : ds' = \tfrac{2}{3}a \,.\, s : \tfrac{1}{3}a \,.\, 2s = 1 : 1.$$

Es werden also die Diagonale ads' und, da die Schnittlinie l'l parallel der Octaëderkante gh geht, auch die Kanten, zwischen welchen die Diagonale läuft, halbirt und a·l und a'l' sind somit die Diagonalen der Octaëderflächen.

2) Die Fläche des Pyramidenwürfels ist gerade aufgesetzt auf die Octaëderkante, sie schneidet daher von den beiden benachbarten mit dieser an einem Eck zusammenstossenden Kanten gleich grosse Theile ab. Es sei Fig. XLIII der Hauptschnitt am Octaëder, der durch diese beiden Kanten

geht und n n' das Stück der Kanten, welches von der Pyramidenwürfelfläche abgeschnitten wird, welche aufgesetzt auf die Kante erscheint, die von a nach dem auf Ca und a'a· (Fig. XLIII) senkrecht stehenden a gehen würde. Nun ist offenbar a n : a a· = a l : a C, d. h. es wird von den Kanten dasselbe Stück abgeschnitten, wie von der Dimension a (a C). Denken wir uns nun die Fläche a : 2a statt durch 1 a durch $\frac{1}{2}$ a gelegt, so läuft dieselbe von a nach $\frac{1}{2}$ a, parallel a'a· und die Kanten, die dadurch auf den benachbarten Flächen des Octaëders gebildet werden, von a nach der Hälfte der gegenüberliegenden Kante, also wie die Diagonalen des Octaëders, (wie Taf. IV, 45 zu sehen). Es ergiebt sich daraus zugleich, dass diese Pyramidenwürfelfläche parallel 2 Diagonalen des Octaëders, welche an einem Eck zusammenstossen, läuft, also in 2 Diagonalzonen des Octaëders gehört, während die Leucitoidfläche [a : a : $\frac{1}{3}$ a] auch in 2 Diagonalzonen, aber in 2, kein Eck gemeinsam habende, gehört.

3) a) Es sei Fig. (XL) a a· a·· die Fläche des Octaëders, a C, a·C und a··C die drei Dimensionen a des Octaëders, a s die Octaëderdiagonale, n· m a· und n m a·· 2 Flächen eines Hexakisoctaëders, die sich in der Richtung von m s' gegenseitig schneiden. Wenn nun diese Flächen in die Diagonalzone des Octaëders gehören sollen, so muss s'C : Cm sich verhalten = s C : C a. Eine von a nach n a laufende Fläche schneidet, (pag. 51) von der zwischen a und n a gelegenen Dimension s $\frac{2n}{n+1}$ s ab. Es muss also für die Hexakisoctaëderfläche in diesem Falle gelten $\frac{2n}{n+1}$ s : m a = s : a, d. h.

$$\frac{2n}{n+1} = m \text{ sein.}$$

Diese Bedingung erfüllen die Hexakisoctaëder [a : $\frac{3}{2}$ a : 3 a] und [a : $\frac{5}{3}$ a : 5 a]. Es gehören diese beiden also in die Diagonalzone des Octaëders.

b) Es sei Fig. XLIV der Durchschnitt durch die horizontalen Octaëderkanten (durch a'a'' C von Fig. XL gelegt gedacht), so geht die Diagonale des Octaëders von dem auf C senkrechten a nach s (Fig. XLIV). Alle Flächen, die in diese Diagonalzone gehören sollen, müssen durch 1 a gelegt nach 1 s gehen. Wir sahen aus Fig. XLIV, dass 3 verschiedene Fälle möglich sind, in denen eine Fläche dieser Bedingung entsprechen kann. Denken wir uns nehmlich Flächen durch diese Diagonale, durch 1 a und 1 s gelegt, so werden dieselben auf unserer Projectionsebene die Dimensionen a in dreierlei Weise schneiden, und wir können darnach die Flächen der Hexakisoctaëder, welche in die Diagonalzone des Octaëders gehören, in folgende 3 Abtheilungen bringen.

1ste Abtheilung: Hierher gehören die Flächen, deren Richtung die Linie 1 s n angiebt. Wir wissen, dass die Fläche des Pyramidenwürfels [a : 2a : ∞ a] oder [$\frac{1}{2}$a : a : ∞ a] in 2, an einem a zusammenlaufende Diagonalen fällt, also durch dieselbe Diagonale, die wir hier als Zonenachse betrachten, gelegt, von s nach s' läuft. Alle Flächen aus dieser Abtheilung der Diagonalzone des Octaëders fallen zwischen die erwähnte Pyramidenwürfelfläche und die Octaëderfläche, zwischen s s' und s a''. Es sind dies die unter a betrachteten Flächen, deren $m = \frac{2n}{n+1}$.

2te Abtheilung: Hierher gehören die Flächen, die zwischen s s' und s a' laufen, d. h. zwischen der Fläche des Pyramidenwürfels [$\frac{1}{2}$a : a : ∞ a] und der des sg. niederen Leucitoides [a : a : $\frac{1}{3}$a], das in die Diagonalzone des Octaëders gehört und von a' nach dem auf C senkrechten a und s laufend, von der Dimension Ca'' $\frac{1}{3}$ abschneidet (cfr. pag. 136). Diese Flächen werden also von der Dimension a' ein Stück > 1 abschneiden, also von s nach n'^2 laufen, wo n' jeden

Werth $> 1 < \infty$ haben kann. Denken wir uns nun die Fläche durch 1 a·· gelegt, so wird sie in der Richtung der Linie s^2 n^2 laufen, und von der auf C senkrechten Dimension a ein Stück grösser als 1 a, m a abschneiden, während sie von der Dimension a·′ ein Stück $>$ m a, also n a abschneidet. Sollen nun diese Flächen in die Diagonalzone des Octaëders gehören, so muss $s^2C : ma = s : a$ sich verhalten, die Linie n^2 a·· s^2 schneidet aber von der Dimension Cs^2 nach pag. 53 $\frac{2n}{n-1} s = Cs^2$ ab. Setzen wir diesen Werth von Cs^2 in obige Bedingungsproportion, so erhalten wir $\frac{2n}{n-1} s : ma = s : a$, $\frac{2n}{n-1} = m$. Von den bekannten Hexakisoctaëdern entspricht dieser Bedingung das von dem Werthe $\boxed{a : \frac{1}{3}a : 7a}$.

3te Abtheilung: Hierher gehören die Flächen, die zwischen s a·′ und s s″, d. h. zwischen die Leucitoidfläche $\boxed{a : a : \frac{1}{3}a}$ und die Granatoëderfläche fallen, welche als Abstumpfung der Kante a··a·′ durch unsere Diagonale gelegt gedacht wird, und das Octaëder in diesem Falle halbirt. Die Flächen laufen, durch unsere Diagonale gelegt, von s nach m′a, und schneiden von a· ein Stück m ab, das stets < 1 und > 0 sein muss, und von der Dimension Ca·· ein Stück, das stets $< \frac{1}{3}$ sein muss und $<$ als m. Denken wir uns daher wieder die Fläche durch 1 a·· gelegt, so läuft sie in der Richtung von s^3 nach m, wo s^3 a·· m parallel s m′ ist, und schneidet die Dimension a′ in $m > 1$ und die auf C senkrechte $a > m$, also in n. Die Fläche, die von a nach m a geht, schneidet von der zwischen beiden gelegenen Dimension s ein Stück $= \frac{2m}{m+1} s$ ab (pag. 62), Cr ist also $= \frac{2m}{m+1} s$. Für das Stück Cs^3 fanden wir (pag. 64)

$Cs^3 = \frac{2m}{m-1} s$. Wenn nun die Fläche in die Diagonalzone gehören soll, so muss offenbar wieder sein

$$Cs^3 : na = s : a$$

$$\frac{2m}{m-1} s : na = s : a$$

$$\frac{2m}{m-1} = n.$$

Dieser Bedingung entsprechen die Hexakisoctaëder $\boxed{a : 2a : 4a}$ und $\boxed{a : \frac{11}{5} a : \frac{11}{3} a}$.

Mit Hülfe dieser 3 Gleichungen lässt sich allemal leicht bestimmen, ob eine gewisse Hexakisoctaëderfläche in die Diagonalzone des Octaëders gehöre oder nicht, so wie sich auch daraus und aus der Fig. XLIV bestimmen lässt, welcher Diagonale eine bestimmte Fläche parallel läuft, also welcher bestimmten Diagonalzone und welcher der 3 Abtheilungen dieselbe angehöre.

§. 44. Bei dem Hemiedrischwerden einer Gestalt ändert sich, wie wir wissen, nichts in Beziehung auf die Lage der Flächen, also auch nichts in Beziehung auf das Fallen derselben in Zonen, nur die Erscheinungsweise der Zonenachsen in den hemiedrischen Gestalten wird durch die veränderte Gesalt derselben etwas verwischt. Die Kantenzone des Octaëders wird nun identisch mit der Kantenzone des Tetraëders, da eine Kante des Tetraëders parallel läuft einer Kante des Octaëders, die Diagonalzone des Octaëders wird ebenso zur Diagonalzone des Tetraëders. Da das Granatoëder nicht hemiedrisch wird, so erscheint die Kantenzone desselben durch kein Begränzungselement eines hemiedrischen Körpers augenfällig ersetzt.

Bei den parallelflächig hemiedrischen Gestalten ist es hauptsächlich bemerkbar die Kantenzone des Würfels, die hier identisch mit der Grundkantenzone des Pyritoëders wird,

und die Diagonalzone des Würfels oder Kantenzone des Octaëders, die sich ebenfalls noch als Diagonalzone des Pyritoëders und zwar als Zone der von einer Grundkante nach der andern gezogenen Linie v r Fig. XXXII ausspricht.

Von der Berechnung der Gestalten.

§. 45. Wenn wir irgend eine noch so verwickelte und flächenreiche Combination vor uns haben, so können wir immer aus der Lage der einzelnen Flächen, der Zahl mit der, und der Art, in welcher sie aneinander auftreten und mit Hülfe der pag. 126 und 129 für das Erkennen der hemiedrischen Gestalten angegebenen Merkmale ohne weiteres bestimmen, welche verschiedene Arten von einfachen Körpern die Combination ausmachen. Octaëder, Würfel, Granatoëder und Tetraëder sind einzig in ihrer Art; zu deren Bestimmung brauchen wir nie etwas anderes, als die oben angegebenen Hülfsmittel. Von den 4 übrigen Geschlechtern von Körpern und ihren verschiedenen Hälftflächnern giebt es, wie wir wissen, von jedem eine grosse Menge verschiedener Arten, indem die Werthe der Parameter ihrer Flächen in der bei der Betrachtung jedes einzelnen Geschlechtes angegebenen Weise zwischen bestimmten Gränzen einem grossen Wechsel unterworfen sein können.

Für diese Körper können wir in sehr vielen Fällen mit den Kennzeichen, welche uns das Auge allein darbietet, die ihnen zukommenden Werthe der Parameter nicht erkennen. In den vorigen §§. wurde näher erörtert, wie uns die Betrachtung der verschiedenen Zonenverhältnisse einer Fläche Auskunft über den Werth ihrer Parameter zu geben im Stande sei, daher wir auch hier nicht mehr weiter auf dieses Mittel zur Berechnung einer Fläche eingehen, um so mehr, als wir in den nachfolgenden, ausführlicher entwickelten Beispielen von Combinationen davon noch öfter Gebrauch machen werden.

In den vorhergehenden §§. wurde für jedes einzelne Geschlecht von Körpern entwickelt, wie alle ihre Verhältnisse, die Werthe ihrer Kanten ihrer verschiedenen Neigungswinkel, ihrer ebenen Winkel u. s. w., alle von den Werthen m und n ihrer Parameter abhängen, wie wir also, wenn uns der Werth eines Winkels, einer Kante bekannt ist, aus dieser bekannten Grösse mit Hülfe jener Gleichung, die Werthe für das unbekannte m und n finden können. Da wir im regulären Systeme 3 Achsen haben, wovon wir immer eine als in der Einheit von einer Fläche geschnitten angenommen haben, so sind uns höchstens 2 Grössen und dies nur bei den Hexakisoctaëdern unbekannt. Wir brauchen daher für diese auch wenigstens die Werthe für 2 Winkel oder überhaupt zwei Elemente derselben, um daraus beide unbekannte Grössen finden zu können; bei den übrigen Körpern (Leucitoiden, Pyramidenoctaëdern und Pyramidenwürfeln) ist uns immer nur eine Grösse unbekannt, zu ihrer Bestimmung reicht uns daher auch ein solches von dieser unbekannten Grösse abhängiges bekanntes Element hin, um jene daraus zu finden. Bei der ungleichen Ausdehnung der Flächen der natürlichen Krystalle ist es unmöglich allenfalls aus einer gemessenen Kantenlänge und ihrem Verhältnisse zu einer Achse die Parameter-Werthe eines Körpers zu berechnen, ebenso unsicher ist dies aus der Berechnung der ebenen Winkel, weil wir keine passenden Instrumente haben, um diese Winkel mit Genauigkeit zu messen; eben dasselbe gilt für die Neigung der Kanten gegen die Achsen und es bleibt uns so als das einzige, aber auch vollkommen ausreichende Mittel hiezu nur das übrig, Kantenwinkel zu messen, und aus den Formeln für die Kantenwinkel die Werthe der Parameter zu entwickeln. Bei allen einfachen Körpern ist diese Rechnung sehr einfach und mit Hülfe der Logarithmen leicht auszuführen. Wir hätten z. B. den Kantenwinkel der Kante A eines Leucitoides gemessen und denselben zu $144^0, 54', 12''$

gefunden. Für den halben Kantenwinkel hatten wir pag. 42 gefunden sin : cos $= \sqrt{m^2 + 1} : 1$, also ist $\frac{\sin}{\cos} = \sqrt{m^2 + 1}$ $= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$. Die Hälfte von 144°, 54′, 12″ ist 72°, 27′, 6″. Es ist aber lg. tg 72°, 27′ 6″ = 10,5000017. Erheben wir beide Seiten der obigen Gleichung aufs Quadrat, so erhalten wir $m^2 + 1 = (\operatorname{tg} \frac{1}{2} A)^2$. Multipliciren wir daher obigen lg mit 2 und schlagen die zu diesem lg gehörige Zahl auf, so finden wir $m^2 + 1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A^2 = 10{,}00001$ *), daraus

$m^2 = 9{,}00001$, $m = 3{,}000$; unser gesuchtes Leucitoid wird also = $\boxed{a : 3a : 3a}$. Hätten wir es mit einem Hexakisoctaëder zu thun gehabt, so hätten wir 2 verschiedene Kanten messen müssen, um den Werth für m und n zu finden.

In den meisten Fällen hat man es jedoch in der Natur nicht mit einfachen Körpern zu thun und kann daher oft nur Combinationskanten messen, für die wir bisher noch keine Formeln entwickelt haben. Auch hier gilt wieder die allgemeine Regel, dass wir so viel Winkel messen müssen, als uns unbekannte Grössen vorliegen. Haben wir es daher z. B. mit einer Combination zweier Hexakisoctaëder zu thun, so müssen wir möglicherweise 4 Winkel messen, um beide bestimmen zu können. Ist uns eine der beiden Gestalten auf irgend eine Weise bekannt, so ist es uns in vielen Fällen leicht, mittelst einer einfachen Rechnung aus einem gemessenen Combinationskantenwinkel entweder einen Kantenwinkel der uns unbekannten Gestalt, oder ihren Neigungswinkel gegen eine Dimension a, s oder t zu finden, und nach der für diese angegebenen Formeln die Parameterwerthe der

*) Wir sehen daraus, dass die oben angegebene Messung wahrscheinlich nicht absolut genau war, weil wir genau genommen, einen grösseren Werth als 3 finden. Bei so unbedeutenden Differenzen nimmt man aber immer die ganze Zahl an, weil man nie eine absolut fehlerfreie Messung wird bewerkstelligen können.

Fläche selbst. Es ist uns dieses aber immer möglich, wenn wir es mit einer Combination zu thun haben, in welcher die unbekannten Flächen als gerade Abstumpfungsflächen oder Zuschärfungsflächen einer Kante, oder als Zuspitzung eines Eckes erscheinen, welche gerade aufgesetzt erscheint auf die Flächen einer andern Gestalt, wie sich dies leicht aus Folgendem ergiebt.

Es sei a b c a' (Fig. XLV) der Durchschnitt durch zwei Flächen a A und a'A, deren Kante A abgestumpft erscheint durch die Fläche b c. Wir hätten nun den Winkel a b c = x gemessen. Die den uns noch unbekannten Kantenwinkel A halbirende Ebene muss, unter unserer Voraussetzung, dass die Abstumpfung der Kante eine gerade ist, senkrecht auf b c in der Richtung von A C der Figur stehen. Wir kennen also in dem Dreieck b d A 1) den Winkel b d A als einen rechten, 2) den ∢ A b d als Complement unseres gemessenen Winkels x zu 2 rechten, also ist uns auch der dritte Winkel b A d, unser halber Kantenwinkel A, welcher nach B 3 die beiden andern zu 2 rechten ergänzt, bekannt, und daraus finden wir leicht die Werthe der Flächen nach den Formeln für den Kantenwinkel A. Die geraden Abstumpfungsflächen einer Kante sind aber immer ohne weitere Messung zu finden, sowie uns der einfache Körper bekannt ist, dessen Kanten sie abstumpfen, indem nur Flächen mit einem unbekannten Werthe der Parameter als gerade Kantenabstumpfung anderer auftreten können, was schon daraus hervorgeht, dass kein Körper des regulären Systems mehr als 24 gleiche Kanten hat. Es können daher auch keine Hexakisoctaëder als gerade Abstumpfungsflächen von Kanten auftreten. Bei der Aufzählung der Combinations-Erscheinungen der einzelnen Körper (§. 38 u. f.) haben wir die Bedingungen angegeben, unter welchen die verschiedenen Körper ihre Kanten gegenseitig abstumpfen. Wo es nicht geschehen ist, wird man leicht die Werthe der Abstumpfungsfläche finden, wenn man

erwägt, dass sie denselben Verlauf, also dieselben Neigungsverhältnisse gegen eine der Achsen hat, wie die von ihr abgestumpfte Kante, aus denen sich daher nach den für die Neigung der Kanten angegebenen Verhältnissen von sin : cos der Werth derselben leicht berechnen lässt.

Ist die Kante A zweier unbekannten Flächen a A und a'A (Fig. XLV) durch die ebenfalls unbekannten Flächen b B und c B zugeschärft, so reichen zwei Messungen, nehmlich des Winkels a b B und b B c = r hin, um die beiden Gestalten zu bestimmen, wenn sie keine Hexakisoctaëder sind. Aus dem Kantenwinkel b B c finden wir in diesem Falle unmittelbar den Werth der Flächen b B und B c aus den Formeln für den Kantenwinkel B. Wenn uns aber ∡ r' bekannt ist, so ist auch ∡ y bekannt, da $\frac{1}{2}$ r und ∡ b d r, welcher ein rechter ist, ∡ y zu 180 ergänzen. Ziehen wir von unserm ebenfalls gemessenen Winkel a b B diesen Winkel y ab, so finden wir auf die oben bei Betrachtung der Verhältnisse, die sich bei der Kantenabstumpfung finden, angegebenen Weise den Winkel x, dann den an A und daraus ebenfalls die Werthe für die Flächen a A, a'A; natürlich ebenfalls nur, wenn sie keine Hexakisoctaëderflächen sind, in welchem Falle wir noch irgend einen andern Winkel messen müssten. Sind uns aber die Flächen a A a'A bekannt, mögen die Zuschärfungsflächen b B c B einem Körper angehören, welchen Geschlechts es sei, so reicht die Messung des Winkels r hin die Flächen zu bestimmen, indem — wenn es ein Hexakisoctaëder ist, uns durch die zugeschärfte Kante B des bekannten Körpers a A a'A, ein zweites Element zur Berechnung, nehmlich der Verlauf der Kante B, der stets gleich ist dem der Kante A dadurch gegeben ist, also ausser dem Kantenwinkel an B auch der Neigungswinkel der Kante B selbst. Diese beiden Elemente sind aber zur Bestimmung der 2 unbekannten Grössen m und n des Hexakisoctaëders vollkommen hinreichend.

Eben so leicht finden wir aber noch bei gerade auf die Flächen aufgesetzten Zuspitzungen der Ecken aus den gemessenen Combinations - Kantenwinkeln einen der Winkel, für den wir die Formeln in Factoren von m und n bei den einzelnen Körpern angegeben haben, woraus wir dann den einen oder den andern Körper berechnen können. Erscheint nehmlich die Zuspitzungsfläche gerade aufgesetzt auf eine andere Fläche, wie z. B. Fig. 13 die Leucitoidflächen auf die Octaëderflächen, so muss jedesmal der Durchschnitt durch diesen Combinations-Kantenwinkel, welcher das Maass desselben angiebt, zusammenfallen mit demjenigen, welcher das Maass der Neigung der beiden Flächen gegen eine der Dimensionen giebt. Es sei (Fig. XLVI) lmn der Durchschnitt durch eine solche Combinationskante, mn die Fläche, welche das Eck o des Körpers lm zuspitzt und ∠ lmn der uns bekannte Combinations-Kantenwinkel, to und tl 2 Parameter der Fläche ol *). Ziehen wir nun lx parallel mn, so ist ∠ s = ∠ r (B 2) = 180 minus unserem gemessenen Combinations-Kantenwinkel lmn. Ist uns nun die Fläche lm, auf welche die Zuspitzungsflächen gerade aufgesetzt erscheinen bekannt, so ist uns auch der Winkel v, d. h. ihr Neigungswinkel gegen die Dimension ot und ∠ olt, d. h. die Hälfte eines ihrer Kantenwinkel bekannt. Kennen wir aber ∠ s und ∠ v, so kennen wir auch den dritten Winkel im Dreiecke mno, nehmlich ∠ onm und wenn wir diesen kennen, so haben wir damit auch ∠ w, der ihn zu 180° ergänzt, d. h. den Neigungswinkel der unbekannten Fläche mn gegen die Dimension to, woraus wir ihren Werth berechnen können. Eben so leicht können wir aber auch ∠ z finden; ist uns nehmlich ∠ olt bekannt, so ist ∠ z = ∠ olt — ∠ r, d. h. — ∠ s. Bei gleicher Dimension lt verhält sich also für

*) Von lt, to kann hier eines auch eine Dimension s oder t sein; man hat dann eben die Neigungsverhältnisse gegen diese zur Berechnung anzuwenden.

die beiden Flächen der Werth der Dimension to für die Flächen lmo und mn = ot : xt. Es ist aber $ot : xt = \frac{ot}{lt} : \frac{xt}{lt} = tg$ olt : tgz (C. I. c.). Welches von diesen beiden Verfahren bequemer zur Berechnung der Flächen sei, das kommt auf den speciellen Fall an.

Auch bei den Hexakisoctaëdern reicht in diesem Falle eine Messung hin, wenn eine der Flächen schon bekannt ist, indem uns zugleich immer noch ausser dem Winkel eine Zone dadurch gegeben ist, mittelst welcher und dem Winkel wir dann die 2 Werthe m und n finden können. Bei der Betrachtung der Combination des Rothkupfererzes §. 46 werden wir ein hierher gehöriges Beispiel weiter entwickeln. Weitläufiger werden die Berechnungen, wenn man es mit Zuspitzungen der Ecken zu thun hat, welche auf die Kanten oder schief auf die Flächen aufgesetzt erscheinen. Hier reichen wir nicht damit aus, wenn wir nur einen solchen Winkel messen, auch wenn uns die eine der beiden Flächen bekannt ist, indem möglicherweise eine grosse Menge von Flächen denselben Winkel mit einer andern machen können, z. B. am Octaëder können Hexakisoctaëder, Pyramiden-Würfel als Zuspitzung seiner Ecken von ganz verschiedenen Werthen erscheinen und doch alle denselben Winkel in dieser Kante mit ihm machen; man muss daher, was jedoch selten der Fall sein wird, wenn sonst kein Anhaltspunct für die Bestimmung der gegebenen Fläche, keine Zone, welcher sie angehört, bekannt ist, zwei solcher verschiedenen Winkel messen.

Welches Verhältniss findet man nun für 3 rechtwinklige Parameter zweier Flächen, die mit einander eine Kante bilden, deren Winkel uns bekannt ist?

Nennen wir diesen Kantenwinkel W, der jedenfalls immer ein stumpfer, dessen Cosinus also stets negativ sein wird

und allgemein die 3 Parameter der einen Fläche a, b, c, der andern a', b', c', so ist

$$\text{Cos } W = -\frac{aa' \; bb' + cc' \; aa' + bb' \; cc'}{\sqrt{a^2 b^2 + c^2 a^2 + b^2 c^2} \; \sqrt{a'^2 b'^2 + c'^2 a'^2 + b'^2 c'^2}}.$$

Es sei Fig. XLVIII F W F' der Kantenwinkel W, den 2 Flächen F und F' mit einander bilden. In C sei der Mittelpunct unserer Construction. Fällen wir nun aus C 2 Perpendikel Cf und Cp auf beide Flächen, so ist offenbar ∡ fCp das Supplement unseres Kantenwinkels zu 180, (da ∡ fCW das Supplement von fWC und WCp von pWC zu 90, also fCW + WCp = 90 + 90 – (fWC + pWC)). Wir finden den Werth für ein solches Perpendikel — die Normale — für jede auf 3 rechtwinklige Achsen bezogene Fläche auf folgende Weise: Es seien (Fig. XLVII) Ca, Cb, Cc unsere 3 rechtwinkligen Achsen a, b, c von jedem beliebigen Werthe, abc eine dieselben beliebig schneidende Fläche. Legen wir nun eine Ebene senkrecht auf unserer Fläche durch die Linie aC, so wird Cd senkrecht auf Ca und auf bc sein, unsere Normale Ce wird also das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke aCd aus dem rechten Winkel C auf die Hypotenusa ad, also $= \frac{aC \,.\, Cd}{ad}$ (B 10)

aC ist = a, Cd selbst wieder ein solches Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke bCc auf die Hypotenusa bc, also $Cd = \frac{bC . Cc}{bc} = \frac{b \,.\, c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, also wird, da $ad = \sqrt{a^2 + (Cd)^2}$

$$Ce = \frac{a \,.\, \frac{b \,.\, c}{\sqrt{b^2 + c^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 c^2}{b^2 + c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}.$$

Nennen wir nun die 3 rechtwinkligen Achsen unserer Fläche F a, b, c, unserer Fläche F' ≐ a', b', c', so finden wir mit Hülfe der analytischen Geometrie nicht nur die beiden

Normalen der Fläche F = N und der Fläche F' = N'; sondern auch die Grösse der beiden zum Dreiecke verbindenden Linie ausgedrückt in Werthen von a, b, c und a' b' c'.

Nach C III ist aber $\text{Cos } C = \frac{N^2 + N'^2 - R^2}{2 N N'}$, woraus man dann auf die oben angegebene Formel für Cos W gelangt. Setzen wir nun statt a, b, c und a', b', c' die Werthe, welche wir für diese Dimensionen im regulären Systeme haben, nehmlich a, ma, na und a, m'a, n'a, so sind uns also, da jedenfalls ein a allen Flächen gemeinschaftlich ist, wenn wir eine Fläche bereits kennen, höchstens 2 Grössen der andern nehmlich m' und n' unbekannt, die wir finden können, wenn wir 2 Gleichungen für dieselben, also 2 Kantenwinkel haben. Ist, wie bei den 24flächigen Körpern nur eine unbekannte Grösse vorhanden, so finden wir also auch aus einem Winkel den Werth dieser Fläche. Für das reguläre System verwandelt sich daher obige Formel für Cos W, wenn wir a = a' = 1 statt b und c, m und n und statt b' und c', m' und n' setzen in folgende; es wird

$$\text{Cos } W = -\frac{aa'bb' + aa'cc' + bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\sqrt{a'^2b'^2 + a'^2c'^2 + b'^2c'^2}}$$

$$= -\frac{mm' + nn' + mm'nn'}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}\sqrt{m'^2 + n'^2 + m'^2n'^2}}$$

$$= -\frac{mm'(nn' + 1) + nn'}{\sqrt{m^2(n^2 + 1) + n^2}\sqrt{m'^2(n'^2 + 1) + n'^2}}.$$

Wird m oder n, m' oder n' gleich 1 = a, so vereinfachen sich darnach die Formeln bedeutend (siehe den Anhang.)

§. 46. *Combination des Rothkupfererzes.* Taf. III, Fig. 25.

Von den vielen Combinationen, welche unter den Gestalten des regulären Systemes vorkommen, wählen wir als ein Beispiel die von M o h s und P h i l l i p s beobachtete des

Rothkupfererzes. Es ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Flächen, dass P die Flächen des Octaëders, a die Würfel- und m die Granatoëderflächen sind. Die Flächen b gehören einem Leucitoide, c einem Pyramidenwürfel, n einem Pyramidenoctaëder, e einem Hexakisoctaëder an.

Aus dem Parallelismus der Kanten zwischen m e b e' und m' geht hervor, dass b die Kante des Granatoëders zwischen m und m' abstumpft, also das gewöhnliche Leucitoëder | a : 2a : 2a | ist. Da c die Kante dieses Leucitoëders zwischen b und b gerade abstumpft, so ist daraus ersichtlich, dass es dem gewöhnlichen Pyramidenwürfel | a : 2a : ∞ a | angehört. Zur Bestimmung des Werthes für n bedarf man einer Messung. Misst man den Winkel gegen m, der $= 160^0, 32'$ ist und zieht 90^0 von demselben ab, so erhält man dadurch den halben Kantenwinkel für die Kante A des Pyramidenoctaëders $= 70^0, 32'$. Für den halben Kantenwinkel des Octaëders hatten wir sin : cos = a : s für denselben am Pyramidenoctaëder sin : cos = na : s. Es ist also $\frac{\sin}{\cos} =$ tg am Octaëderkantenwinkel : $\frac{\sin}{\cos} =$ tg des Pyramidenoctaëderkantenwinkels = 1 : n. Nun ist lg tg $70^0, 32' = 10,4516548$ = lg 2820 ..., und lg tg $54^0, 44'$ (dem halben Octaëderkantenwinkel) = 10,1504784 = lg 1414 .... Sie verhalten sich also wie 28 : 14 = 2 : 1, n ist also = 2, unser Pyramidenoctaëder also = | a : a : 2a |.

Die Flächen e gehören einem Hexakisoctaëder an, das als Zuschärfung der Kanten des Granatoëders hier auch als Abstumpfung der Combinationskanten zwischen dem Leucitoëder und dem Granatoëder erscheint. Es gehört also in die Kantenzone des Granatoëders, wofür nach pag. 135 die Bedingung $m = \frac{n}{n-1}$ gefunden wurde. Wären die Flächen e

etwas ausgedehnter, so würde man sehen, dass je 2 an ein und derselben Octaëderfläche sich gegenüberliegende diese in parallelen Kanten schneiden, also in die Diagonalzone des Octaëders und zwar in unsere erste Abtheilung derselben gehören, wofür wir die Bedingung fanden pag. 137 $m = \frac{2n}{n+1}$; setzen wir diese beiden Werthe für m zusammen, so erhalten wir daraus

$$\frac{n}{n-1} = \frac{2n}{n+1},\ n(n+1) = 2n(n-1)$$
$$2n^2 - 2n = n^2 + n$$
$$n^2 = 3n$$
$$n = 3 \text{ und daraus } m = \tfrac{3}{2},$$

das Hexakisoctaëder ist also $e = \boxed{a : \frac{3}{2}a : 3a}$. Dasselbe finden wir, wenn wir den Winkel von e gegen m messen. Das Supplement dieses Winkels zu 2 Rechten ist der Winkel an der Grundkante der Pyramide, welche auf die Granatoëderfläche aufgesetzt unser Pyramidengranatoëder e bildet. Für diesen Winkel ist aber offenbar sin : cos = der Höhe der auf die Granatoëderfläche aufgesetzten 4seitigen Pyramide, welche unser Hexakisoctaëder e bilden würde: dem Perpendikel aus dem Mittelpunct der Granatoëderfläche auf die Kante derselben. Die Höhenlinie H finden wir, wenn wir die Dimension s' des Granatoëders von der des Hexakisoctaëders abziehen, also $H = \frac{2m}{m+1}s - s = \frac{m-1}{m+1}s$. Das Perpendikel P auf die Kante ist das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke auf die Hypotenusa, in dem die beiden Diagonalen der Granatoëderfläche, für die wir die Werthe $\frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}$ gefunden hatten, also $P = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$. Es ist also

$$\sin : \cos = \frac{m-1}{m+1} \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{6}} = (m-1)\sqrt{3} : m+1, \text{ also}$$

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{(m-1)\sqrt{3}}{m+1}.$$

Der Winkel von e : m ist = 160°,54′, sein Complement 19°,6′. Da nun tg 19°,6 = $\frac{1}{5}\sqrt{3}$, so finden wir daraus

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{5}$$

$$5m - 5 = m + 1$$

$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$ und n = 3 wie oben.

Taf. III stellt nun noch sämmtliche Flächen der oberen Hälfte dieses Körpers in der Weise dar, dass sie alle durch 1 a, welches senkrecht auf der Fläche der Tafel gedacht ist, gelegt angenommen werden und die Linien die Richtung angeben, in welcher sie die durch die beiden andern Dimensionen a gelegte Ebene, hier die Fläche von Taf. III schneiden. Die starken Linien geben die auf diese Weise erhaltene Projection sämmtlicher Flächen an, welche an unserem Körper an der senkrecht über unserer Projectionsebene in 1 a gebildeten Ecke zusammenstossen, während die schwachen Linien die Flächen, welche sich an den 4 andern Ecken befinden, alle ebenfalls durch unser 1 a gelegt gedacht, in derselben Weise darstellen. Es ergiebt sich aus den Werthen dieser Flächen dann mit Leichtigkeit, wie sie dann in unserer Weise darzustellen sind. Die an dem oberen Eck gelegenen Flächen e schneiden wirklich durch unser senkrechtes 1 a gelegt die beiden andern a in der Entfernung $\frac{3}{2}$a und 3 a. Die Fläche e an dem dem Beschauer zugekehrten Ecke der Fig. 25 würde unser senkrechtes a in der Entfernung 3 a schneiden, das dritte ebenfalls horizontale in der Entfernung $\frac{3}{2}$ a. Denken wir uns nun diese Fläche statt durch 3 a durch 1 a gelegt, so wird sie von dem a, das sie vorher in der Einheit schnitt $\frac{1}{3}$ von dem andern $\frac{1}{2}$ abschneiden, da $3 : \frac{3}{2} : 1 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. Die an derselben Fläche b mit dem erwähnten e anliegende andere Fläche e′ (Fig. 25) wird unser senkrechtes a in der Entfernung von $\frac{3}{2}$ a, das dritte in der Entfernung von 3 a schneiden; denken wir sie ebenfalls durch 1 a statt durch $\frac{3}{2}$ a gelegt, so wird sie = $\frac{2}{3}$ a : a : 2 a, da $1 : \frac{3}{2} : 3 = \frac{2}{3} : 1 : 2$. —

Diejenigen Flächen c, welche parallel unserer senkrechten Dimension a laufen, werden durch 1 a gelegt durch den Mittelpunct des Körpers in der Richtung der Linien c' laufen, ebenso auch die parallel demselben a und einer Dimension s laufenden senkrechten Granatoëderflächen und die an den Lateralecken gelegenen, auch einem horizontalen a parallel gehenden Würfelflächen a. Die 4 Granatoëderflächen, welche wie die horizontalen Kanten des Octaëders laufen, werden daher mit den Dimensionen s, die 4 Würfelflächen, welche die Lateralecken abstumpfen, mit den Dimensionen a zusammenfallen.

Durch diese Art der Darstellung von Krystallflächen kommen die Zonenverhältnisse derselben auf eine überraschende Weise zur Anschauung. Alle Flächen nehmlich, deren Linien sich in einem Puncte schneiden, bilden eine Zone, deren Achse von dem senkrechten 1 a, durch das alle Flächen gelegt gedacht werden, nach dem gemeinschaftlichen Puncte in unserer Projectionsebene verläuft. Verhältnisse, die uns an den Krystallen oft unklar bleiben, treten hier mit grosser Bestimmtheit hervor. Sehr stark tritt in unserer Figur die Kantenzone des Granatoëders hervor, die sich von den Flächen m über e, b, e, m' rings um den Krystall verfolgen lässt. Wir sehen auch Taf. III in einem Puncte x die 6 verschiedenen Flächen e, die Fläche b und 2 Granatoëderflächen zusammentreffen. Ebenso erkennen wir jetzt, dass die Flächen e wirklich in die Diagonalzone des Octaëders zugleich mit den Pyramidenwürfelflächen und den Granatoëderflächen gehören, indem diese alle den Punct y und 1 a gemeinschaftlich haben. Die Linie von 1 a nach y ist aber die Diagonale des Octaëders.

Eine nähere Betrachtung von Taf. III giebt uns noch eine Menge solcher versteckter Zonenverhältnisse zu erkennen. Wie diese oft dazu dienen, ohne weiteres die Werthe der verschiedenen Flächen zu berechnen, dies zu zeigen, werden

wir bei den andern Krystallsystemen noch bessere Gelegenheit finden, wo die Verhältnisse weniger einfach sind, als bei dem regulären Systeme.

§. 47. *Combination des tetraëdrischen Kupferglanzes* Taf. V, Fig. 50.

Diese Combination giebt sich sogleich als eine geneigtflächig hemiedrische zu erkennen, und es bestimmt sich sogleich P als die Fläche des Tetraëders, f als die Fläche des Würfels, l als die Flächen eines Pyramidentetraëders als $\frac{1}{2}\ \boxed{a : ma : ma}$, n als die gerade Abstumpfung der Kanten B′ eines Pyramidentetraëders muss daher ein Deltoiddodecaëder $\frac{1}{2}\ \boxed{a : a : na}$ sein. Die Flächen o erscheinen mit parallelen Kanten zwischen den Flächen f′ s′ s′ und f′, d. h. sie bilden eine gerade Abstumpfung der Kanten zwischen f und f′, d. h. der Würfelkante, sind also die Granatoëderflächen $o = \boxed{a : a : \infty a}$ und erscheinen daher vollzählig, die Flächen s gehören aber ebenfalls in dieselbe Zone; die Combinationskante zwischen s und s′ wird ebenfalls durch die Granatoëderfläche gerade abgestumpft, s erscheint als Zuschärfung der Kante zwischen f und f′ (der Würfelkante) ist also die Fläche eines Pyramidenwürfels und sie erscheinen ebenfalls vollzählig, da die Pyramidenwürfelflächen nicht der geneigtflächigen Hemiedrie fähig sind. Nun ergiebt sich auch, dass die Flächen r als gerade Abstumpfung der Kanten zwischen o und o, d. h. der Granatoëderkanten, Flächen des gewöhnlichen Leucitoëders $\frac{1}{2}\ \boxed{a : 2a : 2a}$ sind, und zwar den linken Hälftflächner bilden, wenn l und l die Flächen der rechten Hälfte eines Leucitoides sind.

Aus der Betrachtung des Kantenparallelismus der verschiedenen Flächen lassen sich alle übrigen Flächen ohne Messung bestimmen. Da die Kanten, welche die Fläche l

mit o und o' bildet, parallel sind, so folgt daraus, dass auch l die gerade Abstumpfung der Granatoëderkante (o : o') bildet, also ebenfalls die Hälfte des gewöhnlichen Leucitoides $= \frac{1}{2} \boxed{a : 2a : 2a}$ ist. Da n als gerade Abstumpfung der Kanten des Pyramidentetraëders $\frac{1}{2} \boxed{a : 2a : 2a}$ erscheint, so wird sein $n = \frac{m + 1}{2}$ des Leucitoides, also $\frac{3}{2}$, die Fläche n also $= \frac{1}{2} \boxed{a : a : \frac{3}{2}a}$ und da s mit r sowohl als l Kanten bildet, welche den Kanten B' des Leucitoides parallel sind, so gehört es in die Kantenzone des Leucitoides $\boxed{a : 2a : 2a}$ und zwar in die der Kante B, welche (pag. 42) von $\frac{2ms}{m + 1}$ nach ma läuft. Zugleich gehört sie in die Kantenzone des Würfels, wie aus dem Parallelismus der Kanten zwischen f, s, o, s' und f' hervorgeht, geht also parallel einem a, d. h. ist die Fläche eines Pyramidenwürfels $\boxed{a : ma : \infty a}$. Die Flächen r˙ und r˙˙ schneiden unser senkrechtes a in der Entfernung $ma = 2a$, legen wir sie daher durch dieses in der Einheit, so schneiden sie die beiden andern in der Entfernung 1 und $\frac{1}{2}$ vom Mittelpunct, da $a : 2a : 2a = \frac{1}{2}a : a : a$. Die Kante zwischen r˙ und r˙˙, in deren Zone unser s˙ gehört, wird also von 1a nach dem Durchschnittspuncte der beiden Flächen r˙ und r˙˙ (β auf der Tafel) laufen. Ziehen wir nun durch diesen Punct Linien parallel a, so haben wir damit die Projection der Flächen s˙ und s˙˙. Daraus finden wir leicht den Werth für m. Da nehmlich die Linie s˙ s˙ parallel der Dimension a (hier ff) geht, so ist (B 8) $C\delta : \delta\gamma : C\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma : \alpha\gamma = a : m : m + 1$, hier ist nun $a = \frac{1}{2}$, $m = 1$, also ist $\alpha\beta : \alpha\gamma = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = 2 : 3$, $C\delta = \frac{2}{3} C\gamma$ und da $C\gamma = \frac{1}{2}$ ist $C\delta = \frac{1}{3}$; unsere Fläche s˙ wird also $= \boxed{a : \frac{1}{3}a : \infty a} = \boxed{a : 3a : \infty a}$. Da die Pyramidenwürfel nicht der geneigtflächigen Hemiedrie fähig sind, so

erscheinen die Flächen s vollzählig zu 24 an unserer Combination, die somit ohne alle Messung vollständig verwickelt ist und deren versteckte Zonenverhältnisse mit Hülfe der Taf. V ebenfalls leicht aufzufinden sind.

Zwei- und einachsiges System.

Syn. Viergliedriges (Weiss). Tetragonales (Breithaupt und Naumann). Pyramidales (Mohs). Monodimetrisches (Hausmann).

§. 48. Es beruht, wie schon pag. 8 angeführt wurde, auf 3 untereinander rechtwinkligen Dimensionen, die jedoch nicht mehr alle gleich sind, sondern von denen eine von den beiden andern, unter sich gleichen, verschieden ist. Es tritt ein Unterschied des Verhaltens der Masse des Krystalles ein in dieser einen Richtung, demnach auch in der davon abhängigen und diesen Unterschied äusserlich sichtbar beurkundenden Bildung von Flächen.

Man nennt die von den beiden andern verschiedene Achse die Hauptachse und denkt sich alle Krystalle dieses Systems so gestellt, dass sich dieselbe in senkrechter Stellung befindet. Die beiden unter sich gleichen werden als Nebenachsen bezeichnet. Die Hälften der Hauptachsen bezeichnen wir mit c, die der beiden gleichen Nebenachsen mit a.

Da nach dem allgemein gültigen Symmetriegesetze nur gleiche Stellen eines Krystalles gleiche Erscheinungen, also gleiche Flächen zeigen, so werden wir in diesem Systeme, wo wir zweierlei verschiedene Richtungen haben, auch zweierlei Flächenbildungsprocesse an einem Krystalle wahrnehmen können. An den beiden gleichen Richtungen werden stets gleiche Flächen vorkommen, andere an der dritten, es werden neben einander verschiedene Arten von Flächen an

den Dimensionen a mit anderen an der Dimension c vorkommen. Es können zwar auch die 3 Dimensionen zugleich ein und dieselbe Veränderung in Beziehung auf Flächenbildung erleiden; wegen der Verschiedenheit in der Grösse aber, die zwischen ihnen Statt findet, werden die geometrisch gleichwerthigen Flächen verschiedenes Aussehen haben, wenn sie auch zusammen auftreten. Es macht sich jedoch schon hier, noch mehr aber bei den anderen dreiachsigen Systemen bemerklich, dass die verschiedenen Richtungen nicht oft dieselben Veränderungen erleiden, sondern dass an den ungleichen Stellen auch ungleichwerthige Flächen auftreten.

Was die Länge der verschiedenen Achsen betrifft, so ist, wenn wir die Dimension a als 1 annehmen, c entweder grösser oder kleiner als 1, und zwar zeigen die verschiedenen Mineralspecies stets verschiedene Werthe für c. Das Verhältniss von c : a ist nach Weiss, wie überhaupt alle Linearverhältnisse in den Krystallen am besten stets durch Wurzelgrössen auszudrücken, und in den meisten Fällen ein ziemlich einfaches. Die Ableitungscoëfficienten für die verschiedenen Flächen an einer Species sind durchgängig rational und in denselben einfachen Verhältnissen, wie beim regulären Systeme.

§. 49. Es lassen sich um den Mittelpunct der drei sich unter rechten Winkeln schneidenden Dimensionen a, a und c natürlich eben dieselben Flächen, d. h. Flächen mit derselben Lage gegen den Mittelpunct und die drei Achsen denken, wie bei dem regulären System. Auch hier kann eine Fläche

1) nur eine Achse schneiden,

2) zwei Achsen schneiden,

3) alle drei Achsen schneiden, und zwar mit denselben Unterabtheilungen, wie pag. 25 angeführt wurde. Es sind also auch in diesem Krystallsysteme sieben verschiedene Arten von Flächen möglich. Da aber die Dimensionen a und c verschieden sind, so werden die Flächen, welche eine gleiche Lage gegen c haben, wie andere gegen a, ein anderes An-

b) 2 in gleichen Entfernungen, die 3te ungleich;

α) (ma : ma : c). In jedem Octanten ist ebenfalls nur eine solche Fläche möglich, der durch dieselben gebildete Körper wird daher auch als ein Octaëder erscheinen;

β) (a : ma : mc). Wir haben 4 gleiche Dimensionen a, von jedem wird eine Fläche nach den beiden benachbarten Dimensionen a und mc möglich sein, also wenn sie sich an jedem gleichen a wieder findet, 4mal 2, d. h. 8mal an dem oberen Ende von c, und ebenso 8mal an dem unteren sich bilden. Ein solcher Körper wird daher von 16 gleichartigen Flächen begränzt sein;

γ) (a : a : mc). In jedem Octanten ist nur eine solche Fläche möglich, es wird ein von diesen Flächen begränzter Körper daher ebenfalls als ein Octaëder erscheinen;

δ) (a : c : ma). Für diese Fläche gilt dasselbe wie für die unter β erwähnte. Es wird ebenfalls ein Dioctaëder;

c) alle 3 in ungleichen Entfernungen;

α) (c : ma : na). In jedem Octanten sind 2 solche Flächen möglich, einmal schneidet die Fläche von c aus das rechts gelegene a eines Octanten in m, das links gelegene in n, und umgekehrt. Es entsteht hier ebenfalls ein Dioctaëder;

β) (a : ma : nc)
γ) (a : mc : na) für diese beiden Flächen gilt dasselbe. Auch in diesen beiden Fällen geht von jedem a nach rechts und nach links hin eine solche Fläche aus, nur schneidet sie im Falle β weniger von a und mehr von c, im Falle γ mehr von a und weniger von c ab.

Andere Fälle, als die erwähnten, sind nicht möglich.

Es erscheinen also im zwei- und einachsigen Systeme diejenigen Flächen, welche einen einfachen Körper zu bilden im Stande sind und im regulären Systeme erscheinen als

Octaëder	im	2-	und	1achsigen	als	Octaëder
Granatoëder	„	„	„	„	„	„
Leucitoide	„	„	„	„	„	„
Pyramidenoctaëder	„	„	„	„	„	„
Pyramidenwürfel	„	„	„	„	„	„
Pyramidenoctaëder	„	„	„	„	„	Dioctaëder
Leucitoide	„	„	„	„	„	„
Hexakisoctaëder . .	„	„	„	„	„	„

Nur wenn sie mit einander in Combination vorkommen, kann man diese verschiedenen Körper von einander unterscheiden. Die Art und Weise nehmlich, wie sie an dem als Grundgestalt angenommenen Octaëder (a : a : c) untergeordnet auftreten, ist ganz dieselbe, wie die entsprechenden Körper im regulären Systeme am regulären Octaëder sich zeigen; nur in der Zahl zeigt sich natürlich der Unterschied, indem immer nur Paare von gleichen Flächen im 2- und 1achsigen auftreten können. Das Schema des 2- und 1achsigen Systemes gestaltet sich demnach, wie Fig. LIV, wenn wir die Zeichen für die Flächen an die Stellen setzen, wo die Linien, welche auf sie senkrecht aus dem Mittelpunct gezogen gedacht werden, die Quadratoctaëderfläche treffen würden. Man wird daraus sogleich entnehmen können, welchem Körper des regulären Systemes eine beliebige Fläche entspreche, wenn man die beiden Schemata miteinander vergleicht, und wie oft sie vorkommen könne.

§. 50. 1) Die Quadratoctaëder oder viergliedrige Octaëder (Weiss), Tetragonale Pyramiden (Naumann), gleichschenklige vierseitige Pyramiden (Mohs).

Wie wir oben sahen, gehören hierher folgende Körper, nehmlich die Flächen

a) (a : a : c), (a : a : mc), (c : ma : ma), d. h. Octaëder,

Pyramidenoctaëder und Leucitoidflächen des regulären Systems;

b) (a:c:∞a), (a:mc:∞a), (c:ma:∞a), d. h. Granatoëder und Pyramidenwürfelflächen des regulären Systems.

Die 3 ersteren unterscheiden sich von den 3 letzteren, dass sie alle 3 Dimensionen und die 2a stets in gleichen Entfernungen schneiden, während die 3 letzteren nur 2 Dimensionen und zwar a und c schneiden, der dritten aber parallel laufen. Die ersteren hat man unter dem gemeinschaftlichen Namen Quadratoctaëder I. Ordnung zusammengefasst, während die übrigen als Quadratoctaëder II. Ordnung bezeichnet werden. Beide Arten kommen an einem und demselben Krystall sehr häufig zusammen vor, erscheinen natürlich dann in ganz verschiedener Weise und bedürfen daher einer gesonderten Betrachtung.

A. Quadratoctaëder I. Ordnung
(Taf. VI, Fig. 57 und 58 o).

§. 51. Sie sind alle von 8 gleichschenkligen Dreiecken begränzt, haben zweierlei Kanten, 4 gleiche, welche die Dimensionen a untereinander verbinden, die wir als Lateralkanten bezeichnen wollen und 8, welche von jedem a nach den beiden Enden von c laufen und als Endkanten von den vorigen unterschieden werden sollen.

Die Ecken sind ebenfalls zweierlei, 4 Lateralecken, symmetrisch von 2 Lateral- und 2 Endkanten gebildet, und 2 reguläre Endecken oder Polecken, von oben und unten an c von je 4 Endkanten gebildet.

Die Basis, d. h. der Durchschnitt durch die Dimensionen a ist stets ein Quadrat, weswegen auch diese Körper den Namen Quadratoctaëder und tetragonale Pyramiden erhalten haben. Die Durchschnitte durch die Dimension c und je 2 Dimensionen a, oder durch c und je 2 s sind stets Rhomben.

Geometrische Eigenschaften der Quadratoctaëder I. Ordnung.

Denken wir uns die Flächen aller 3 Arten durch 1 c *gelegt*, und auf der durch die Dimensionen a und s gehenden Fläche in der Weise projicirt, wie es bei den Körpern des regulären Systems schon angewandt wurde, so wird sich das Zeichen für die 2te Art so gestalten ($\frac{1}{m}$ a : $\frac{1}{m}$ a : c), d. h. die Fläche wird statt durch mc durch 1c gelegt, nicht mehr a, sondern $\frac{1}{m}$ a abschneiden, wo m wie überall $>$ 1 und eine rationale Zahl ist. Da wir a und a ebenfalls als 1 annehmen, ist auch hier die Dimension s $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. Wir finden nun

1) für die Neigung der Flächen gegen c

a) am Quadratoctaëder (a : a : c) sin : cos = s : c
b) „ „ ($\frac{1}{m}$a : $\frac{1}{m}$a : c) „ : „ = $\frac{1}{m}$s : c
c) „ „ (ma : ma : c) „ : „ = ms : c.

Bei gleichem Cos. verhalten sich also die Sinuse für a : b : c = s : $\frac{1}{m}$s : ms = 1 : $\frac{1}{m}$: m. Gehen wir von dem Quadratoctaëder (a : a : c) aus, so macht das (ma : ma : c) einen stumpferen Winkel mit der Achse c, während das ($\frac{1}{m}$a : $\frac{1}{m}$a : c) einen schärferen Winkel mit c bildet.

Alle Quadratoctaëder mit dem Zeichen (ma : ma : c) werden wir als „stumpfere" die von der Form ($\frac{1}{m}$a : $\frac{1}{m}$a : c) als „schärfere" oder „spitzere" bezeichnen, wobei als Vergleichungsglied immer das von der Form (a : a : c) angenommen wird, wenn nicht ein anderes besonders als solches bezeichnet ist.

Die Werthe m und $\frac{1}{m}$ geben uns zugleich an, um wieviel ein Quadratoctaëder stumpfer oder schärfer ist. Wenn daher von einem 2fach stumpferen, einem 3fach schärferen die Rede ist, so bedeutet das ein Octaëder, das bei gleichem Cosinus den doppelten oder den dritten Theil des Sinus hat, welchen ein zur Einheit angenommenes Octaëder von der

Form $(a : a : c)$ hat, also das Octaëder $(2a : 2a : c)$ und $(\frac{1}{3} a : \frac{1}{3} a : c)$.

2) Für die Neigung der Flächen gegen die Dimension a

a) am Quadratoctaëder $(a : a : c)$ $\sin : \cos = c : \sqrt{a^2 + c^2}$

b) „ „ $(\frac{1}{m} a : \frac{1}{m} a : c)$ „ : „ $= mc : \sqrt{a^2 + m^2 c^2}$

c) „ „ $(ma : ma : c)$ „ : „ $= c : \sqrt{m^2 a^2 + c^2}$.

Es giebt nehmlich für alle 3 das Verhältniss des Sinus das aus dem Mittelpuncte der Construction auf diejenige Endkante gefällte Perpendikel, welche den Endpunct von c und demjenigen a verbindet, das senkrecht auf dem a steht, gegen das man die Neigung der Fläche ausdrücken will und zugleich das Verhältniss des Cosinus zu diesem Sinuse giebt. Es ist also (nach B 10) für den Fall

a) $\sin : \cos = \frac{a \cdot c}{\sqrt{a^2 + c^2}} : a = c : \sqrt{a^2 + c^2}$ wie oben,

b) $\sin : \cos = \frac{\frac{1}{m} a \cdot c}{\sqrt{(\frac{1}{m} a)^2 + c^2}} : \frac{1}{m} a = mc : \sqrt{a^2 + m^2 c^2}$ wie oben

c) $\sin : \cos = \frac{ma \cdot c}{\sqrt{m^2 a^2 + c^2}} : ma = c : \sqrt{m^2 a^2 + c^2}$ wie oben.

3) Neigung der Kanten gegen c

a) für $(a : a : c)$ ist $\sin : \cos = a : c$

b) „ $(\frac{1}{m} a : \frac{1}{m} a : c)$ „ „ : „ $= \frac{1}{m} a : c$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ „ : „ $= ma : c$.

4) Neigung der Flächen in den Kanten.

1) In den Endkanten A.

Dieser Winkel ist das Complement des unter 2 betrachteten Neigungswinkels der Flächen gegen die Dimension a, hat also das umgekehrte Verhältniss von sin : cos, das jener hat, also ist:

a) für $(a : a : c)$ $\sin : \cos = \sqrt{c^2 + a^2} : c$

b) „ $(\frac{1}{m} a : \frac{1}{m} a : c)$ „ : „ $= \sqrt{a^2 + m^2 c^2} : mc$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ : „ $= \sqrt{m^2 a^2 + c^2} : c$.

2) **In den Lateralkanten C**

a) für $(a : a : c)$ ist $\sin : \cos = c : s$

b) „ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a : c)$ „ „ : „ $= c : \frac{1}{m}s$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ „ : „ $= c : ms$.

lit andern Worten, es ist das Complement des Neigungs-inkels der Flächen gegen die Achse c.

5) **Werthe der Kanten:**

1) **A. der Endkanten A**

a) für $(a : a : c)$ ist $A = \sqrt{c^2 + 1}$ *)

b) „ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a : c)$ „ „ $= \sqrt{\frac{m^2 c^2 + 1}{m}}$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ „ $= \sqrt{m^2 + c^2}$

2) **B. der Lateralkanten C**

a) für $(a : a : c)$ ist $C = \sqrt{2}$

b) „ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a : c)$ „ „ $= \frac{\sqrt{2}}{m}$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ „ $= m\sqrt{2}$.

Aus den Werthen der Kanten finden sich nun leicht

6) **die ebenen Winkel.**

Da die Flächen der Octaëder gleichschenkliche Dreiecke ind, so brauchen wir nur einen Winkel zu berechnen, in-em der halbe ebene Endspitzenwinkel und der Winkel an er Grundlinie, hier der Lateralkante, einander zu einem echten Winkel ergänzen. Wir finden für alle 3 Arten von)ctaëdern für den Winkel an der Lateralkante sin : cos = die)iagonale der Fläche: halben Lateralkante. Es giebt dies, la die halbe Lateralkante stets = der Dimension s ist, und $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $s^2 = \frac{1}{2}$

a) für $(a : a : c)$ $\sin : \cos = \sqrt{s^2 + c^2} : s$

b) „ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a : c)$ „ : „ $= \sqrt{s^2 + m^2 c^2} : s$

c) „ $(ma : ma : c)$ „ : „ $= \sqrt{m^2 s^2 + c^2} : ms$.

*) Da wir $a = 1$ annehmen.

B. Quadratoctaëder II. Ordnung.

§. 52. Wenn sie für sich allein vorkommen, sind sie nicht von denen der I. Ordnung zu unterscheiden, indem sie ganz dieselbe Zahl und Beschaffenheit der Begränzungselemente wahrnehmen lassen, nur wenn beide zugleich mit einander vorkommen, kann man sie an der verschiedenen Lage ihrer Flächen unterscheiden. Die Flächen der Octaëder II. Ordnung laufen nehmlich von c nach a parallel der andern Dimension a. Ihre Endkanten gehen dann von c nach den Dimensionen s, da in diesen die Flächen sich schneiden und hier die Lateralecken bilden. Ist daher aa' (Fig. XIII) der Verlauf der Fläche eines Quadratoctaëders I. Ordnung, so ist g'g der eines Quadratoctaëders II. Ordnung.

Geometrische Eigenschaften der Quadratoctaëder II. Ordnung.

Denken wir auch hier die Flächen der verschiedenen Arten durch c gelegt, so erhalten wir für das Quadratoctaëder (a : mc : ∞ a) das Zeichen ($\frac{1}{m}$ a : c : ∞ a). Es seien Fig. LXXVIII die Linien dd', ee', ff' die verschiedenen Arten von Quadratoctaëdern II. Ordnung, wenn aa' das Grundoctaëder darstellt, in derselben Weise wie die I. Ordnung projicirt, so ergiebt sich

1) für die Neigung der Fläche gegen c
   - a) von (a : c : ∞ a) sin : cos = a : c
   - b) „ ($\frac{1}{m}$ a : c : ∞ a) „ : „ = $\frac{1}{m}$ a : c
   - c) „ (ma : c : ∞ a) „ : „ = ma : c.

Es verhalten sich also bei gleichem Cosinus auch hier die Sinuse wie 1 : $\frac{1}{m}$: m. Man unterscheidet auch hier wieder stumpfere und schärfere Quadratoctaëder ganz in derselben Weise, wie es bei den Quadratoctaëdern I. Ordnung angegeben wurde, und nennt auch hier eines das 2, 3, ... mfach schärfere oder stumpfere von einem bestimmten anderen.

2) Für die Neigung der Fläche gegen die Dimension s

a) von $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= \quad c : \sqrt{c^2 + 2}$

b) „ $(\frac{1}{m} a : c : \infty a)$ „ : „ $= mc : \sqrt{m^2 c^2 + 2}$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= \quad c : \sqrt{c^2 + 2m^2}$.

Es wurde schon pag. 34 bewiesen, dass die Linien, welche von 1a parallel dem andern gehen (ee' und e'e'' Fig. LXXVIII) miteinander die Dimension s in der Entfernung 2s vom Mittelpunct aus treffen, d. h. ein doppelt so grosses Stück abschneiden, als die von 1 a nach 1 a laufende Linie, die 1 s abschneidet. Allgemein wird von einer durch ma parallel dem andern a gehenden Linie die Dimension s in der Entfernung von m . 2s getroffen. Für den Neigungswinkel der Fläche $(a : c : \infty a)$ gegen s haben wir das Verhältniss von cos : sin in der Dimension s und dem vom Mittelpuncte aus auf die zwischen c und der andern Dimension s verlaufende Endkante gefällten Perpendikel. Es ist also

a) für $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= \frac{c \cdot 2s}{\sqrt{4s^2 + c^2}} : 2s = c : \sqrt{2 + c^2}$ wie oben,

b) „ $(\frac{1}{m} a : c : \infty a)$ sin : cos $= \frac{c \cdot \frac{2}{m} s}{\sqrt{c^2 + \frac{4}{m^2} s^2}} : \frac{2}{m} s = mc : \sqrt{m^2 c^2 + 2}$ wie oben,

c) „ $(ma : c : \infty a)$ sin : cos $= \frac{c \cdot 2ms}{\sqrt{c^2 + 4m^2 s^2}} : 2ms = c : \sqrt{c^2 + 2m^2}$ wie oben. *)

3) Für die Neigung gegen die Dimension a ist das Verhältniss von sin : cos immer das umgekehrte von dem der Neigung gegen die Achse c, also

a) für $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= c : a$,

b) „ $(\frac{1}{m} a : c : \infty a)$ „ : „ $= c : \frac{1}{m} a$,

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= c : ma$.

---

*) Da auch hier $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $s^2 = \frac{1}{2}$, $4s^2 = 2$.

4) **Für die Neigung der Kanten gegen c**

a) für $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= 2s : c$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ : „ $= \frac{2}{m}s : c$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= 2ms : c$.

5) **Für die Neigung der Flächen in den Kanten.**

1) In den Endkanten A

a) für $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= \sqrt{c^2 + 2} : c$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ : „ $= \sqrt{m^2 c^2 + 2} : mc$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= \sqrt{c^2 + 2m^2} : c$.

Es sind diese halben Winkel das Complement des Neigungswinkels der Fläche gegen die Dimension s, haben also das umgekehrte Verhältniss von sin : cos, wie dieser. Ebenso sind die halben Winkel der Flächen in den Lateralkanten das Complement für den Neigungswinkel der Fläche gegen c. Es gilt daher für den Winkel

2) in den Lateralkanten C

a) für $(a : c : \infty a)$ sin : cos $= c : a$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ : „ $= c : \frac{1}{m}a$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= c : ma$.

6) **Werthe der Kanten.**

1) Der Endkanten A, die von c nach $2s$, $\frac{2}{m}s$ und $2ms$ laufen

a) für $(a : c : \infty a)$ wird $A = \sqrt{4s^2 + c^2} = \sqrt{c + 2}$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ $A = \sqrt{(\frac{2}{m}s)^2 + c^2} = \sqrt{\frac{m^2c^2 + 2}{m}}$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ $A = \sqrt{(2ms)^2 + c^2} = \sqrt{2m^2 + c^2}$

2) der Lateralkanten C, welche die Dimensionen s verbinden

a) für $(a : c : \infty a)$ wird $C = 2a$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ $C = \frac{2}{m}a$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ $C = 2ma$.

Die halbe Lateralkante ist = dem Theil der Dimension a,

elchen die Fläche abschneidet (Fig. XIII) $ag' = aC = \frac{1}{2}C$, ie ganze ist also das Doppelte davon.

7) Ebene Winkel.

Auch hier brauchen wir nur einen Winkel zu berechnen, a auch die Flächen der Quadratoctaëder II. Ordnung gleichhenklige Dreiecke sind. Auch hier giebt die Diagonale m c nach a und die halbe Lateralkante das Verhältniss von n : cos für den Winkel an der Grundlinie.

Wir finden daher für diesen Winkel zwischen den zwei nten A und C

a) von $(a : c : \infty a)$ $\sin : \cos = \sqrt{a^2 + c^2} : a$

b) „ $(\frac{1}{m}a : c : \infty a)$ „ : „ $= \sqrt{(\frac{1}{m}a)^2 + c^2} : \frac{1}{m}a = \sqrt{a^2 + m^2 c^2} : a$

c) „ $(ma : c : \infty a)$ „ : „ $= \sqrt{m^2 a^2 + c^2} : ma = \sqrt{m^2 + c^2} : m$.

ergleichen wir die zweierlei Ordnungen der Quadratoctaëder Beziehung auf die Neigungen ihrer Flächen und Kanten egen c, so finden wir, dass sie in einem sehr einfachen erhältnisse zu einander stehen.

Es verhalten sich nehmlich bei stets gleichem Cosinus c

1) die Sinuse der Neigungswinkel der Fläche gegen die Achse c

a) bei den 3erlei Quadratoctaëdern I. Ordnung $= s : \frac{1}{m}s : ms$

b) „ „ „ „ II. „ $= a : \frac{1}{m}a : ma$,

2) die Sinuse der Neigungswinkel der Kanten gegen c

a) bei den 3erlei Quadratoctaëdern I. Ordnung $= a : \frac{1}{m}a : ma$

b) „ „ „ „ II. „ $= 2s : \frac{2}{m}s : 2ms$

as heisst: hat m bei beiden Ordnungen gleiche Werthe, so iuft immer die Kante des Quadratoctaëders I. Ordnung, rie die Fläche eines Quadratoctaëders II. Ordnung, da die Dimension a denselben Werth hat, wie die des Octaëders . Ordnung und die Fläche des Quadratoctaëders I. Ordnung hat dieselbe Neigung wie die Kante eines Quadratoctaëders II. Ordnung, das stets die Hälfte des Werthes von jenem in der Dimension a hat, oder umgekehrt, die Kante des

Quadratoctaëders II. Ordnung hat stets dieselbe Neigung gegen c, wie die Fläche eines Quadratoctaëders I. Ordnung, das den doppelten Werth für die Dimension a hat, wie jenes. Wenn verschiedene Quadratoctaëder verschiedener Art an einem Krystalle zugleich vorkommen, so stehen sie meistens in einem solchen einfachen Verhältnisse zu einander, wie das ebenerwähnte. Sie erscheinen dann so, dass die Kanten des einen durch die Flächen des andern gerade abgestumpft werden. Diese Abstumpfungsflächen haben dann immer dieselbe Neigung gegen die Achse c, wie die Kanten, welche sie abstumpfen, und einem Quadratoctaëder entgegengesetzter Ordnung angehören.

Man nennt dasjenige Quadratoctaëder, welches die Kanten eines anderen abstumpft, sein erstes stumpferes, dasjenige, welches nun die Kanten dieses wieder abstumpfte, heisst das zweite stumpfere, dessen Kanten wieder abgestumpft werden durch die Flächen des dritten stumpferen.

Geht man von demselben Quadratoctaëder aus, so ist sein erstes spitzeres das, dessen Kanten dieselbe Neigung haben, wie die Flächen desjenigen, von dem man ausgeht, und dessen Kanten durch dieses letztere abgestumpft erscheinen würden; das zweite spitzere ist dasjenige, dessen Kanten durch die Flächen des ersten spitzeren abgestumpft wurden u. s. f.

Man sieht daraus, dass von einem bestimmten Quadratoctaëder aus

gleicher Ordnung sind

das II., IV., VI.... stumpfere, das II., IV., VI.... spitzere,

entgegengesetzter Ordnung aber

das I., III., V.... stumpfere und das I., III., V.... spitzere, wie dies aus Fig. LXXVIII zu ersehen.

Gehen wir von einem Quadratoctaëder a : a : c aus, so folgen die stumpferen und schärferen in der Weise aufeinander:

I. Ordnung:	II. Ordnung.
Hauptoctaëder $(a : a : c)$	Istes stumpferes $(a : c : \infty a)$
IItes stumpferes $(2a : 2a : c)$	IIItes „ $(2a : c : \infty a)$
IVtes „ $(4a : 4a : c)$	Vtes „ $(4a : c : \infty a)$
Hauptoctaëder $(a : a : c)$	Istes spitzeres $(\frac{1}{2}a : c : \infty a)$
IItes spitzeres $(\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : c)$	IIItes „ $(\frac{1}{4}a : c : \infty a)$
IVtes „ $(\frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a : c)$	Vtes „ $(\frac{1}{8}a : c : \infty a)$.

Ausser dem ersten stumpferen und ersten spitzeren, Taf. VII die Flächen o und d, kommen jedoch selten an einem Mineral noch andere Octaëder dieser Reihe vor, häufiger noch andere, die nicht in dieselbe gehören, wie das Octaëder $(3a : 3a : c)$ oder $(\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : c)$ (Taf. VII, Fig. 75 die Flächen $\frac{1}{3}$ o und $\frac{2}{3}$ d) u. s. f. Auch von diesen können dann wieder stumpfere und spitzere erscheinen, deren Werthe für a sich leicht aus den oben angegebenen Regeln finden lassen, und als dreifach stumpfere, dreifach spitzere von dem dritten stumpferen etc. wohl zu unterscheiden sind.

§. 53. Dioctaëder $(ma : na : c)$ oder $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : c)$ Vierundvierkantner (Weiss). Ditetragonale Pyramiden mPn (Naumann) *). Ungleichschenklige 8seitige Pyramiden (Mohs).

Die Dioctaëder entsprechen, wie wir pag. 161 sahen, den Pyramidenoctaëdern, Leucitoiden und den Hexakisoctaëdern des regulären Systems. Nur aus der Art und Weise ihres Vorkommens mit anderen Flächen lässt sich erkennen, welchem dieser Körper in einem bestimmten Falle eine Fläche

*) Genau genommen entspricht der Bezeichnung von Naumann nur unsere $(a : na : mc)$, wo n alle möglichen Werthe zwischen 1 und ∞, m alle Werthe zwischen o und ∞ haben kann.

analog sei, und zugleich, welchen Paaren von Flächen desselben, indem von den 3 Paaren von Flächen des Hexakisoctaëders des regulären Systems im quadratischen jedes für sich allein vorkommen kann. Es giebt also Vierundvierkantner von 2 wesentlich verschiedenen Formen, wenn wir sie alle durch 1 c gelegt denken, nehmlich

$(a : na : c)$ $(a : \frac{1}{n}a : c)$ $(ma : na : c)$ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : c)$.

Leucitoide und Pyramidenoctaëder verhalten sich in Beziehung auf ihre Erscheinung gerade umgekehrt. Denken wir uns das reguläre Octaëder in einer bestimmten Stellung derjenigen des Quadratoctaëders entsprechend, und bezeichnen wir die dann senkrechte Dimension a ebenfalls mit c, so erscheinen die an c anliegenden Flächen der Leucitoide als Quadratoctaëder und die an den Dimensionen a anliegenden als Dioctaëder; bei den Pyramidenoctaëdern dagegen erscheinen die von c nach a und a gehenden, d. h. die an den Endkanten als Zuschärfung derselben sich zeigenden Flächen als Dioctaëder, während die der Lateralkanten zwischen a und a ein spitzeres Quadratoctaëder bilden. Das Zeichen $(a : na : c)$ entspricht den aus Pyramidenoctaëdern, das $(a : \frac{1}{n}a : c) = (a : na : nc)$ den aus den Leucitoiden entstandenen Dioctaëdern.

Das Zeichen $(c : ma : na)$ entspricht den Flächen des Hexakisoctaëders, welche paarweise an c zum Vorschein kommen, das $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : c)$ denen, welche an a und a, an den Lateralecken sich zeigen. Es lassen sich also alle unter die 2 Formeln $(ma : na : c)$ und $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : c)$ bringen, wobei zu bemerken, dass für die den Leucitoiden und für die den Pyramidenoctaëdern entsprechenden Dioctaëder $m = 1$ wird. Die Dioctaëder (Taf. VI, Fig. 62) sind von 16 ungleichseitigen Dreiecken begränzte Körper, die 24 Kanten und 10 Ecken von dreierlei Art haben; nehmlich 8 gleiche in einer horizontalen Ebene liegende Lateralkanten C; oben und unten 4 gleiche A von den Dimensionen a nach c, und eben

so viele von den Dimensionen s nach c laufende Endkanten B. Von diesen zweierlei in c zusammenstossenden Kanten haben diese Körper den Namen Vierundvierkantner erhalten. Die Ecken an c sind symmetrische 4 und 4kantige, die 4 an den Dimensionen a, wie die 4 an den Dimensionen s sind ebenfalls symmetrische 2 und 2kantige.

§. 54. Berechnung der Vierundvierkantner von der Form (ma : na : c).

1) Der Dimension s.

Dieselbe wird in demselben Verhältnisse geschnitten, wie bei den Hexakisoctaëdern von den gleichen Flächen. Wir fanden dafür pag. 67 $s' = \frac{2mn}{m+n} s$.

2) Neigung der Flächen gegen die Achse

1) gegen c. Es ist dieselbe, wie die der Hexakisoctaëderfläche (a : ma : na) gegen a, hier ist dafür jedoch c zu setzen, daher ändern sich die Formeln von pag. 63 in die

$\sin : \cos = mn : c\sqrt{m^2+n^2}$

2) gegen ma „ : „ $= cn : m\sqrt{n^2+c^2}$

3) gegen na „ : „ $= cm : n\sqrt{m^2+c^2}$

4) gegen s „ : „ $= c(m+n) : \sqrt{c^2(n-m)^2+2m^2n^2}$.

3) Neigung der Kanten gegen die Achsen.

1) Der Kanten A, die von c nach ma laufen, gegen c $\sin : \cos = m : c$,

2) der Kanten B, die von c nach $\frac{2mn}{m+n}$ s laufen

$$\sin : \cos = \frac{2mn}{m+n} s : c = 2mns : (m+n)c,$$

3) der Lateralkanten C gegen ma
$\sin : \cos = n : m$,

4) der Lateralkanten C gegen die Dimension s'

$$\sin : \cos = \frac{2mn}{n-m} s : \frac{2mn}{m+n} s$$
$$= m+n : n-m.$$

Fig. XIX sei m's' unsere Kante C, $Cs' = \frac{2mns}{m+n}$, so ist für $\sphericalangle$ C'sx sin : cos = Cx : Cs pag. 64 hatten wir für Cx gefunden $Cx = \frac{2mns}{n-m}$, also ist $\sin : \cos = \frac{2mns}{n-m} : \frac{2mns}{m+n}$ wie oben.

4) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.

1) In den Kanten A und B.

Sie sind gleich den Neigungen der Hexakisoctaëderfläche in den Kanten A und C, doch ist auch hier wieder in den Formeln pag. 68 und 69 statt a c zu setzen, daher erhalten wir 1) in A $\sin : \cos = n\sqrt{c^2+m^2} : cm$

2) „ B „ : „ $= \sqrt{(m+n)^2 c^2 + 2m^2 n^2} : c(n-m)$

3) „ C „ : „ $= c\sqrt{m^2+n^2} : mn$,

es ist der Winkel in C das Complement für den Neigungswinkel der Fläche gegen c, hat also das umgekehrte Verhältniss von sin : cos wie jener, für den wir gefunden hatten $\sin : \cos = mn : c\sqrt{m^2+n^2}$.

5) Werthe der Kanten.

1) Die Kante A ist $= \sqrt{m^2+n^2 c^2}$

2) Die Kante B ist $= \sqrt{\left(\frac{2mns}{m+n}\right)^2 + c^2}$

$$= \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2 c^2}}{m+n.}$$

3) Die Kante C ist $= \frac{m\sqrt{m^2+n^2}}{m+n.}$

Es sei Fig. XVI mn der Lauf unserer Kante C von ma (m) nach na (n), so ist ml, das bleibende Stück zwischen

ler Dimension a und s, unsere Kante C. In Fig. XVI ist $Cm = Cv = ma$, $Cn = na$, $Cl = \frac{2mn}{m+n} s$. Nach der

Formel $x : y = Na : M(a+b)$ finden wir

$$ml : ln = mr . Cv : rv (Cv + vn)$$ oder wenn vir die Werthe dafür einsetzen $ml : ln = m : n$ (da $M = N$ n beiden Gliedern weggelassen werden kann)

$$ml = \frac{m}{m+n} \text{ von } mn = \frac{m}{m+n} \sqrt{m^2 + n^2} \text{ wie oben.}$$

6) Ebene Winkel.

Man findet dieselben nach den bekannten Formeln aus len 3 Seiten A, B und C, oder indem man direct das Verhältniss von sin : cos für die 3 Winkel berechnet. Zieht man nehmlich von c aus eine Linie senkrecht auf die Lateralkante, so giebt diese Linie das Verhältniss vom Sinus für beide Winkel an der Lateralkante, wenn das Stück an a den Cosinus zu diesem Sinus für den an a, das an s anliegende Stück den Cosinus für den an s anliegenden Winkel zu demselben Sinus bildet.

Es sei (Fig. LV) eine Fläche des Dioctaëders, so ist für $\measuredangle\ \beta$ sin : cos $= Cv : vs$ — für $\measuredangle\ \alpha$ sin : cos $= Cv : av$. Das Perpendikel Cv ist die Hypotenusa des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten C und der aus C auf die Lateralkante gefällte Perpendikel Cr (Fig. LVI) ist, also

$$Cv = \sqrt{\frac{c^2 + m^2 n^2}{m^2 + n^2}} = \sqrt{\frac{m^2 n^2 + (m^2 + n^2) c^2}{m^2 + n^2}}$$

das Stück rm (Fig. LVI) ist $= \sqrt{(mC)^2 - (Cr)^2} = \frac{\sqrt{m^2 - m^2 n^2}}{m^2 + n^2}$

das Stück sr ist $= \sqrt{(Cs)^2 - (Cr)^2} = \sqrt{\frac{2 m^2 n^2}{(m+n)^2} - \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}}$.

Wir erhalten daraus also

für $\measuredangle\ \alpha$ sin : cos $= \sqrt{\frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2} + c^2} : \sqrt{\frac{m^2 (m^2 + n^2) - m^2 n^2}{m^2 + n^2}}$

$$= \sqrt{m^2n^2 + (m^2 + n^2)c^2} : \sqrt{m^2(m^2 + n^2) - m^2n^2}$$

$$= \sqrt{m^2n^2 + (m^2 + n^2)c^2} : m^2$$

für $\sphericalangle\, \beta$ sin : cos $= \sqrt{\frac{m^2n^2 + c^2(m^2+n^2)}{m^2 + n^2}} : \sqrt{\frac{2m^2n^2}{(m+n)^2} - \frac{m^2n^2}{m^2+n^2}}$

$$= m+n\sqrt{m^2n^2+c^2(m^2+n^2)} : \sqrt{2m^2n^2(m^2+n^2) - m^2n^2(m+n)^2}$$

$$= \text{———————} : \sqrt{m^2n^2(2m^2+2n^2-(m+n)^2)}$$

$$= \text{———————} : \sqrt{m^2n^2(m^2 + n^2 - 2mn)}$$

$$= \text{———————} : \sqrt{m^2n^2(n-m)^2}$$

$$= m+n\sqrt{m^2n^2 + c^2(m^2+n^2)} : mn(n-m).$$

Es verhalten sich bei gleichem Sinus die Cosinuse dieser Winkel, d. h. also die an a und s anliegenden Stücke der Kante C, wie sie von dem Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Lateralkante getheilt werden

das Stück an a : dem an s $= mr : rs = m^2 : \frac{mn(n-m)}{m+n}$

$$= m(n+m) : n(n-m).$$

§. 55. **Berechnung der Vierundvierkantner** $(\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a : c)$. Wir setzen hier voraus, dass $n > m > 1$ ist, $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, also $\frac{1}{n}$ dem ma, $\frac{1}{m}$ dem na der Form (ma : na : c) entspreche. Setzt man nun in den obigen für diese letzteren Dioctaëder gefundenen Formeln überall statt m $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ statt n, so findet man die Werthe für die Dioctaëder von der Form $(\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}a : c)$ wie folgt:

1) für die Dimension s

$$s = \frac{2}{n+m}s$$

2) für die Neigung der Flächen

1) gegen c sin : cos $= 1 : c\sqrt{n^2 + m^2}$

2) gegen $\frac{1}{n}a$ „ : „ $= cn : \sqrt{m^2c^2 + 1}$

3) gegen $\frac{1}{m}a$ „ : „ $= cm : \sqrt{n^2c^2 + 1}$

4) gegen s „ : „ $= c(m+n) : \sqrt{m^2n^2c^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})^2 + 2}$

$$= c(m+n) : \sqrt{c^2(n-m)^2 + 2}$$

3) Für die Neigung der Kanten gegen die Achsen:

1) der Kanten A gegen c

$\sin : \cos = 1 : nc$

2) der Kanten B gegen c

$\sin : \cos = 2s : (m + n)c$

3) der Lateralkanten C gegen $\frac{1}{n}a$

$\sin : \cos = n : m$

4) der Lateralkanten C gegen s'

$\sin : \cos = m + n : n - m.$

4) Für die Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander:

1) in den Kanten A $\sin : \cos = \sqrt{n^2 c^2 + 1} : mc$

2) „ „ „ B „ : „ $= \sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})^2 c^2 m^2 n^2 + 2} : (n - m)c$

$= \sqrt{(n + m)^2 c^2 + 2} : (n - m)c$

3) „ „ „ C „ : „ $= c\sqrt{n^2 + m^2} : 1.$

5) Werthe der Kanten

1) der Kante A $= \dfrac{\sqrt{n^2 c^2 + 1}}{n}$

2) der Kante B $= \dfrac{\sqrt{c^2 (n + m)^2 + 2}}{n + m}$

3) der Kante C $= \dfrac{\sqrt{n^2 + m^2}}{n(m + n)}.$

6) Ebene Winkel

1) für α $\sin : \cos = n\sqrt{m^2 n^2 + (n^2 + m^2) c^2} : m$

2) für β $\sin : \cos = m + n\sqrt{m^2 n^2 + (n^2 m^2) c^2} : n - m.$

e Stücke der Lateralkante an a und s verhalten sich also ch hier zu einander $= m(m + n) : n(n - m)$.

§. 56. Noch einfacher werden die Formeln für die octaëder von der Form $(a : na : c)$ und $(a : \frac{1}{n}a : c)$, indem an für die ersteren in den Formeln für das Dioctaëder na : na : c), die letzteren in den Formeln für das Dioctaëder a : $\frac{1}{n}$a : c) statt m nur 1 zu setzen braucht.

Man erhält dann:

A) für (a : na : c) B) für ($a : \frac{1}{n} a : c$).

1) Für die Dimension s'

$$s' = \frac{2n}{n+1} s \qquad s' = \frac{2}{n+1} s.$$

2) Für die Neigung der Flächen gegen die Achsen

	A) für (a : na : c)	B) für ($a : \frac{1}{n} a : c$)
1) gegen c	sin : cos $= n : c\sqrt{n^2+1}$	gegen c $1 : c\sqrt{n^2+1}$
2) „ a „ : „	$= cn : \sqrt{n^2+c}$	„ ($\frac{1}{n}$a) $cn : \sqrt{c^2+1}$
3) „ na „ : „	$= c : n\sqrt{c^2+1}$	„ (a) $c : \sqrt{n^2 c^2+1}$
4) „ s' „ : „	$= c(n+1) : \sqrt{c^2(n-1)^2+2n^2}$	„ s' $c(n+1) : \sqrt{c^2(n-1)^2+2}$

A) für (a : na : c) B) für ($a : \frac{1}{n} a : c$).

3) Für die Neigung der Kanten gegen die Achsen:

1) der Kanten A gegen c

sin : cos $= 1 : c$ $\qquad 1 : nc$

2) der Kanten B gegen c

sin : cos $= 2ns : (n+1)c$ $\qquad 2s : (n+1)c$

3) der Kanten C gegen das kleinere a

sin : cos $= n : 1$ $\qquad n : 1$

4) der Kanten C gegen s'

sin : cos $= n+1 : n-1$ $\qquad n+1 : n-1$.

4) Für die Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander

1) in den Kanten A

sin : cos $= n\sqrt{c^2+1} : c$ $\qquad \sqrt{n^2 c^2+1} : c$

2) in den Kanten B

sin : cos $= \sqrt{(n+1)^2c^2+2n^2} : c(n-1)$ $\qquad \sqrt{(n+1)^2c^2+2} : c(n-1)$

3) in den Kanten C

sin : cos $= c\sqrt{n^2+1} : n$ $\qquad c\sqrt{n^2+1} : 1$.

5) Für die Werthe der Kanten

1) der Kanten A $= \sqrt{c^2+1}$ $\qquad \frac{\sqrt{n^2 c^2+1}}{n}$

2) der Kanten B $= \frac{\sqrt{2n^2+(n+1)^2c^2}}{n+1}$ $\frac{\sqrt{c^2(n+1)^2+2}}{n+1}$

3) der Kanten C $= \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n(n+1)}$.

Für die ebenen Winkel

1) für α sin:cos $= \sqrt{n^2+(n^2+1)c^2}:1$ $n\sqrt{n^2+(n^2+1)c^2}:1$

2) für β „ „ $= n+1\sqrt{n^2+c^2(n^2+1)}:n(n-1)$ $n+1\sqrt{n^2+(n^2+1)c^2}:n-1$

für die Stücke an a und s ($\alpha:\sigma$)

$\alpha:\sigma = n+1:n(n-1)$ $n+1:n(n-1)$.

Können die Lateralkanten der Dioctaëder je ein reguläres :hteck bilden?

Wenn dies der Fall sein sollte, so müsste auch die Dimen- n s' = der Dimension a werden. Setzt man daher die erthe dieser beiden Grössen einander gleich und sucht raus die Werthe für m oder n, so findet man, dass diese nn irrational werden, woraus wir erkennen, dass das :guläre Achteck unter den Krystallen nicht vorkommen kann. ür das Dioctaëder

(a : $\frac{1}{n}$ a : c) haben wir $s' = \frac{2}{n+1}$ s, dieses soll nun eich $\frac{1}{n}$ a sein, wenn die Lateralkanten ein reguläres Achteck lden sollen. Wir erhalten aber aus der Gleichung

$$\frac{2}{n+1} s = \frac{1}{n} a$$

$$2ns = n+1,\ (2s-1)n = 1,\ n = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}-1}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}-1},$$ also eine irrationale Grösse.

uf dieselbe Weise lässt es sich auch für die übrigen Dioc- ıëder beweisen.

§. 57. Ausser diesen beiden Gattungen von einfachen Körpern kommen noch andere Arten von Flächen in dem 2- nd 1achsigen Krystallsysteme vor, die jedoch nie allein für

sich einen Körper bilden können, sondern stets mit anderen zugleich vorkommen müssen. Es sind dies die Flächen

(a : a : ∞c) oder (ma : ma : ∞c)

(a : ∞a : ∞c), (c : ∞a : ∞a), (a : ma : ∞c).

Sie entsprechen also zum Theil den Würfel-, Granatoëder- und Pyramidenwürfelflächen des regulären Systems.

1) Die Flächen (a:a:∞c) oder (ma:ma:∞c) (g Taf. VI und VII) bilden eine 4seitige rechtwinklige Säule, die an den Quadratoctaëdern I. Ordnung als Abstumpfung der Lateralkanten, die von a nach a, oder ma nach ma laufen, erscheint, und daher „I vierseitige Säule" oder „I Säule" genannt werden.

2) Die Flächen (a : ∞a : ∞c) oder (ma : ∞a : ∞c) oder ($\frac{1}{m}$a : ∞a : ∞c) (a Taf. VI und VII) bilden ebenfalls eine rechtwinklige vierseitige Säule, und da dieselbe als gerade Abstumpfung der Lateralecken der Quadratoctaëder I. Ordnung oder der Lateralkanten der Quadratoctaëder II. Ordnung erscheint, bezeichnet man sie als „II vierseitige Säule" oder „II Säule."

3) Die Flächen (c : ∞a : ∞a) (h Taf. VI, Fig. 59 und Taf. VII, Fig. 82.) Sie kommen an den beiden Enden der Hauptachsen vor und erscheinen als gerade Abstumpfung der Polecke aller Octaëder und Dioctaëder. Sie werden daher auch „gerade Endflächen" genannt.

4) Die Flächen (a : $\frac{1}{m}$a : ∞c) oder (ma : na : ∞c) etc. (f und l Taf. VII, Fig. 82). Sie bilden eine 8seitige Säule und erscheinen als gerade Abstumpfungen der Lateralkanten der verschiedenen Arten von Dioctaëdern.

Hemiedrische Formen des zwei- und einachsigen Systems.

§. 58. Da es in diesem Systeme nur 2 einfache Körper giebt, so können auch nur zweierlei einfache hemiedrische Gestalten in demselben vorkommen. Nach der Art und Weise

doch, wie die Hälfte der Dioctaëderflächen wächst und rschwindet, entstehen aus diesen möglicherweise 3 verhiedene Körper, die ebenfalls wie bei dem regulären steme als geneigtflächig und parallelflächig hemiedrische terschieden werden können. Gehen wir nehmlich von dem octaëder aus, so sind es folgende 3 Arten des Hemiedrischrdens, die wir uns denken können.

1) Es verschwinden und wachsen die abwechselnden are von Flächen der nach rechts und links, oben und unten wechselnden Octanten *) (es wächst Figur LVIII 1. 2, 6. 8. d schwindet 3, 7. und 4. 5).

2) Es verschwinden und wachsen die abwechselnden zelnen Flächen eines Octanten und zwar immer je 2 einer Lateralkante zusammenstossende obere und untere chen. (Es wächst 1. 4, 7. 8 und schwindet 3. 6, 2. 5).

3) Es verschwinden und wachsen die abwechselnden nzelnen Flächen und zwar stets die nicht an einer Lateralnte zusammenstossenden. (Es wächst 5. 1. 6. 7. und hwindet 2. 4. 3. 8).

Unter den Mineralien ist bis jetzt nur die 1. und 2. Art obachtet worden, daher wir auch nur auf sie etwas näher gehen wollen **).

Von den Quadratoctaëdern ist, wie bei dem regulären steme nur eine Art des Hemiedrischwerdens möglich, nehmh die, nach welcher die abwechselnden Flächen wachsen

*) Es ist hier unter „Octant" ebensowohl der Raum zwischen je 2 Dimensionen a und c, als zwischen je 2 s und c gemeint, ersteres ist der Fall für die Quadratoctaëder I. Ordnung und je 2 an ein und derselben Dimension a zusammenstossende Flächen der Dioctaëder, letzteres für die II. Ordnung, und je 2 an einer Dimension s zusammenstossende Flächen der Dioctaëder.

**) An künstlich dargestellten Salmiakkrystallen kommt die dritte Art vor, welche für sich die Taf. VI, Fig. 72 und 73 dargestellten Gestalten bildet.

und schwinden, wodurch ein dem Tetraëder ähnlicher Körper entsteht. Die hemiedrischen Körper des 2- und 1achsigen Systemes sind ausserordentlich selten, bis jetzt nur an wenigen Mineralspecies und meist nur in Combinationen mit anderen Formen beobachtet worden.

A. Geneigtflächige hemiedrische Gestalten.

§. 59. 1) Hemioctaëder. Quadrattetraëder $\frac{1}{2}$(a:a:c) r u. l. Tetragonale Sphenoide $+\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$ (Naumann) (Taf. VI, Fig. 68 und 69). Sie entstehen durch abwechselndes Wachsen und Schwinden der Flächen der Quadratoctaëder, sind von 4 gleichschenkligen Dreiecken begränzt und haben 2 Polkanten A' und 4 zu je 2 mit einer Polkante zusammenstossende mittlere Kanten B'. Die vier Ecken sind gleich, aber unregelmässig, von 2 Kanten B' und 1 Kante A' gebildet und an dem Quadratoctaëder nicht vorhanden.

Die Hauptachse c verbindet die Mittelpuncte der beiden Polkanten A', die Nebenachsen a die Mittelpuncte zweier einander gegenüberliegenden Mittelkanten B'.

Der Durchschnitt durch je 2 Achsen bleibt derselbe, wie an dem Octaëder, da ja die Achsen selbst unverändert bleiben. Der Durchschnitt durch c und 2 Dimensionen s bildet ein gleichschenkliges Dreieck (Fig. LIX), dessen Grundlinie tt' die Polkante des Tetraëders bildet. Man findet hieraus leicht die geometrischen Eigenschaften dieses Körpers. Es bleibt nehmlich unverändert

1) die Neigung der Flächen gegen die Achsen wie beim Octaëder, dessen Hälftflächner das Tetraëder ist

a) für die I. Ordnung	b) für die II. Ordnung
gegen c sin : cos = s : c	sin : cos = a : c
gegen a „ : „ $= c : \sqrt{c^2+a^2}$	„ : „ $= c : \sqrt{c^2+2}$,

2) die Neigung der Flächen in den Kanten, wie die Neigung der Flächen gegen die Achsen am homoedri-

schen Quadratoctaëder, so dass der halbe Kantenwinkel A′ = ist dem Neigungswinkel der Flächen gegen die Achse c, und der halbe Kantenwinkel in B′ gleich ist dem Neigungswinkel der Flächen gegen die Dimension a,

3) die ebenen Winkel, und zwar wird der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes des Tetraëders = demselben an der Fläche des Octaëders und die Winkel an der Grundlinie A′ werden gleich den Winkeln an der Grundlinie des Octaëders, wie dies unmittelbar aus Fig. 68, wo in das Tetraëder das Octaëder eingezeichnet ist, hervorgeht. Eben so leicht ist aus Fig. LIX zu beweisen, dass

4) die Kante A′ = tt′ bei den Quadratoctaëdern I. Ordnung von der Form (a : a : c) gleich wird 4s, und bei den Octaëdern II. Ordnung von der Form (a : ∞a : c) wird = 4a und aus Fig. 68, dass die Kanten B′ = der doppelten Polkante A des entsprechenden Octaëders werden.

§. 60. 2) Hemidioctaëder $\frac{1}{2}$ (ma : na : c) r und l. Tetragonales Skalenoëder $+\frac{mPn}{2} - \frac{mPn}{2}$ (Naumann). (Fig. 70 und 71).

Sie entstehen durch abwechselndes Wachsen und Schwinden je zweier an einer Polkante und verschiedenen Lateralkanten anliegenden Flächen. In Beziehung auf die Gestalt des neuen Körpers ist es natürlich vollkommen einerlei, ob wir uns denselben entstanden denken aus der abwechselnden Vergrösserung der an a oder der an s zusammenstossenden Flächen; nur in Beziehung auf die Vorstellung, die wir uns von dem physikalischen Verhalten der Masse des Krystalles machen müssen, bedingt es einen Unterschied. Denken wir uns nehmlich 2 an s anliegende Flächen wachsen, wie wir es bei der Beschreibung weiter unten annehmen, so ist das

Gesetz der Hemiedrie ganz dasselbe wie für die geneigtflächige Hemiedrie im regulären Systeme, sind es je 2 an a zusammenstossende Flächen, welche wachsen, so entspricht diese Art der Hemiedrie keiner der im regulären Systeme vorkommenden. Es lässt sich nie entscheiden, ob wirklich die Flächen an a oder an s wachsende und schwindende seien, da wir auch nie entscheiden können, ob ein bestimmtes Octaëder eines I. oder II. Ordnung sei. Es würde nur dann wirklich das Vorkommen beider Arten erwiesen sein, wenn sie beide zugleich an einem und demselben Krystalle vorkommen würden.

Die Hemidioctaëder haben 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Ecken. Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke, die Kanten sind dreierlei, 4 A', die wachsenden Polkanten B, 4 neuentstandene B' über den verschwundenen Kanten B gelegen, und 4 neue C', die dadurch entstehen, dass sich je 2, an a von oben und unten aus verschiedenen Octanten zusammenstossende wachsende Flächen (1 und 6, Fig. LVIII) in den Octanten, in welchen oben und unten die Flächen schwinden, schneiden. Die Kanten C' verbinden die Endpuncte der Kanten A' und B' der oberen und der unteren Hälfte des Körpers miteinander. Die Ecken sind zweierlei, 2 bleibende, symmetrische 2 und 2kantige von je 2 Kanten A' und B' gebildet an den Enden der Hauptachse und 4 unregelmässige 4kantige, von 2 Kanten C' und einer Kante A' und B' gebildet.

Der Hauptschnitt durch 2 Dimensionen a und c ist derselbe wie an dem Dioctaëder, aus welchem der Hälftflächner entstanden ist, der Schnitt durch die 4 a ist ebenfalls derselbe, nehmlich ein Achteck mit zweierlei Winkeln, der Durchschnitt durch c und s ein Deltoid, von den Kanten A' und B' gebildet (c v c' v' Fig. LX und LXI). Die Hauptachse verbindet die beiden symmetrischen Ecken, die Nebenachsen die Mittelpuncte zweier gegenüberliegender Kanten C'.

Geometrische Eigenschaften der Hemidioctaëder.

1) Neigung der Flächen gegen die Achsen.

Sie bleiben dieselben wie bei dem entsprechenden Dioctaëder cfr. pag. 173 und 176.

2) Neigung der Kanten gegen die Achsen.

1) Für die Kante A′ gegen c ist sie dieselbe wie die der Kante B′ des Dioctaëders gegen c, $\sin : \cos = \frac{2mn}{m+n} s : c$.

2) Für die Kante B′ giebt uns sin : cos das Verhältniss der Dimension s, wie sie von den beiden wachsenden Flächen geschnitten wird, zu c. Bei der Berechnung des Hemihexakisoctaëders haben wir dieses Stück schon gefunden. Es war (cfr. pag. 95 und Fig. XXVIII) $\frac{2mns}{n-m}$.

Es verhält sich also $\sin : \cos = 2mns : c(n-m)$.

3) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.

1) In den Kanten A′.

Es sind dies die bleibenden Kanten B des Dioctaëders, für deren Winkel wir fanden

$$\sin : \cos = \sqrt{(m+n)^2 c^2 + 2m^2 n^2} : c(n-m).$$

2) In den Kanten B′.

Diese Kanten laufen von C nach $\frac{2mns}{n-m}$. Denken wir uns diesen Winkel wieder mittelst einer durch c und $\frac{2mns}{n-m}$ gelegten Ebene halbirt, so giebt uns das Verhältniss von sin : cos des halben Winkels das auf $\frac{2mns}{n-m}$ senkrechte s, so weit es von den die Kante B′ bildenden Flächen abgeschnitten wird, wenn das aus dem Mittelpuncte C auf unsere

Kante B′ gefällte Perpendikel das Verhältniss des Cosinus zu diesem Sinus darstellt. Es ist also

$$\sin : \cos = \frac{2\,m\,n}{m+n}\,s : \frac{\frac{2\,m\,n}{n-m}\,s\,.\,c}{\sqrt{\left(\frac{2\,m\,n\,s}{n-m}\right)^2 + c^2}} \quad (B\ 10)$$

$$\sin : \cos = \sqrt{2\,m^2\,n^2 + c^2\,(n-m)^2} : c\,(m+n).$$

3) In den Kanten C′.

Die Kante C′ entsteht durch das Wachsen zweier an ma gelegenen Flächen aus der oberen und unteren Hälfte, die nicht eine Lateralkante gemeinsam haben. Die neuentstandene Kante hat also dieselbe Neigung, wie vorher die beiden Flächen gegen die gemeinschaftliche Dimension ma; also haben wir für den halben Kantenwinkel (pag. 173)

$$\sin : \cos = c\,n : m\sqrt{n^2 + c^2}.$$

4) Werthe der Kanten.

1) Der Kanten A′ und B′.

Es sind die Kanten A′ die wachsenden Kanten B des Dioctaëders, c′v (Fig. LX). Sie erstrecken sich so weit in den benachbarten Octanten, bis sie mit den neuen Kanten B′ (cv), die ebenfalls in dem Octanten, dessen Flächen schwinden, von den beiden angränzenden wachsenden Flächen über der verschwindenden Kante B desselben gebildet werden, in v zusammenstossen.

Es ist nun unsere Kante $A' = c'v = \sqrt{(c'w)^2 + (vw)^2}$, wenn wir vw parallel sC ziehen. Alsdann ist auch (B 8) $cw : cC = cv : cs' = vw : s'C$.

Wir finden nun folgende Werthe für diese Stücke

a) für cv oder unsere Kante B′.

Ziehen wir die Linie c′s′, so ist offenbar nach der Formel des Theilungslehrsatzes

$$x : y = Na : M\,(a + b)$$

$s'v : vc = ss' \,.\, c'C : sC\,(c'C + Cc)$. Setzen wir

dafür die entsprechenden Werthe ein, so erhalten wir

$$s'v : vc = \left(\frac{2\,m\,n\,s}{n-m} - \frac{2\,m\,n\,s}{m+n}\right) c : \frac{2\,m\,n\,s}{m+n} \cdot 2\,c$$

$$= \frac{1}{n-m} - \frac{1}{m+n} : \frac{2}{m+n}$$

$$= \frac{(m+n)-(n-m)}{(n-m)(m+n)} : \frac{2}{m+n}$$

$$= 2\,m : 2\,(n-m) = m : n-m,$$

daraus finden wir also (A 5)

$$vc = \frac{n-m}{n} \text{ von } s'c, \text{ i. e. von } \sqrt{c^2 + \left(\frac{2\,m\,n\,s}{n-m}\right)^2}$$

also $B' = vc = \dfrac{\sqrt{c^2(n-m)^2 + 2\,m^2\,n^2}}{n}$

b) **für die Kante** $A' = c'v$.

Sie ist $= \sqrt{(v\,w)^2 + (c'w)^2}$. Wir finden für $v\,w$ $vw : s'C = cw : cC = cv : cs'$ für $cv : cs'$ bekommen wir nach A 4 a das Verhältniss (aus den unter a gefundenen Werthen) $n-m : n$ (es ist dies das Verhältniss von $y : x+y$ oder $cv : cv + vs'$), also ist

$$vw : s'C = n-m : n \text{ und da } s'C = \frac{2\,n\,m\,s}{n-m}$$

$$vw = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{2\,m\,n\,s}{n-m} \text{ (A 5)}$$

$$vw = 2\,m\,s,$$

ferner ist (nach A 4 c) $Cw : Cc = sv' : s'c = m : n$, also

$$Cw = \frac{m}{n}\,c \text{ und } c'w = c + \frac{m}{n}\,c = \frac{(n+m)\,c}{n}$$

also $C'v = \sqrt{(vw)^2 + (c'w')^2} = \sqrt{2\,m^2\,n^2 + {}^{*})\,(n+m)^2\,c^2}$.

2) **Der Kanten** C'.

Die Kante C' wird durch die Dimension a halbirt. Wir berechnen nun am besten die eine Hälfte dieser Kante. Da nehmlich die beiden an ma oben und unten sich diametral

---

*) $vw = 2\,m\,s$, also $(vw)^2 = (2\,m\,s)^2$ und da $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $(vw)^2 = 2\,m^2$.

gegenüberliegenden Flächen 1 und 6 (Fig. LVIII), Flächen, durch deren Ausdehnung die Kante C' entsteht, gleiche Neigung gegen dieses haben, so müssen sie sich bei ihrer Vergrösserung in einer Kante schneiden, die rechtwinklig auf diesem a steht. Dieselbe Kante C' ist daher die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen andere Kathete ma = aC (Fig. LXI) und dessen Hypotenuse die Linie von dem Mittelpuncte des Körpers nach dem Endpuncte dieser Kante gezogen wird, also vom Mittelpuncte nach v (Fig. LX und LXI).

Die halbe Kante C' ist demnach $= \sqrt{(vC)^2 - (Ca)^2}$ (Fig. LXI) und da Ca = ma = m, $vC = \sqrt{(vw)^2 + (wC)^2}$

$$= \sqrt{2\,m^2 + \frac{m^2}{n^2}\,c^2} = \frac{\sqrt{2\,m^2\,n^2 + m^2\,c^2}}{n}$$

so ist $\frac{1}{2}\,C' = \frac{\sqrt{2\,m^2\,n^2 + m^2\,c^2 - m^2\,n^2}}{n} = \frac{\sqrt{m^2\,n^2 + m^2\,c^2}}{n}$

$$C' = \frac{2\sqrt{m^2\,n^2 + m^2\,c^2}}{n}.$$

Die ebenen Winkel findet man am leichtesten wieder aus den 3 Seiten der Dreiecke nach den bekannten Formeln. Wir übergehen hier deren Berechnung, da die ebenen Winkel überhaupt praktisch ohne Bedeutung in der Mineralogie sind, und die Hemidioctaëder sehr selten und nie allein für sich vorkommen, wodurch ihre ebenen Winkel vollends bedeutungslos werden.

Aus den angegebenen Formeln kann man sehr leicht die Werthe für die andern Hemidioctaëder von der Form (a : na : c) oder (a : $\frac{1}{n}$ a : c) etc. finden, indem man in die bisher entwickelten Formeln nur die entsprechenden Werthe, welche eine Aenderung erleiden, einzusetzen braucht, also statt m im ersten Falle überall 1, oder im zweiten statt m 1 und statt n $\frac{1}{n}$, wodurch die Formeln noch einfacher werden, als in dem oben entwickelten, allgemeinsten Falle.

B. Parallelflächig hemiedrische Gestalten.

§. 61. Es gehören hierher nur die Hälftflächner der Vierundvierkantner, welche dadurch entstehen, dass die abwechselnden Flächenpaare derselben wachsen und schwinden, welche eine Lateralkante mit einander bilden, also dass wenn Fig. LVIII 1 eine wachsende ist, 4 ebenfalls wächst, 3 und 6 schwinden, 7 und 8 wieder wachsen. Auf diese Weise bilden die vergrösserten Lateralkanten abermals ein Quadrat, das eine unregelmässige Stellung in Beziehung auf die Dimensionen a und s hat, wie Fig. LVII. Es bildet sich also ein Quadratoctaëder, das, wenn es für sich allein vorkäme, nicht von einem andern homoedrischen zu unterscheiden wäre, in Combinationen aber, (wie Taf. VII, Fig. 76 x und y) leicht zu erkennen ist.

Geometrische Eigenschaften der parallelflächigen Hemidioctaëder $\frac{1}{2}$ (ma : na : c).

Es bleiben an demselben unverändert die Werthe der Dimensionen $s' = \frac{2mn}{m+n} s'$, der Dimensionen a und c, ebenso die Neigung der Flächen gegen diese Dimensionen, und die Neigung zweier Flächen gegen einander in der Lateralkante C. Vier abwechselnde Lateralkanten des Dioctaëders (ma : na : c) vergrössern sich zu den 4 Lateralkanten C′ des neuen Körpers, von deren Endpuncten (v Fig. LVII) die neuen Polkanten A′ nach c laufen. Wir suchen nun zunächst die Werthe der zweierlei Kanten.

1) Der Kanten C′.

Ziehen wir in dem Quadrate, welches von den Kanten C′ (Fig. LVII) gebildet wird, die Linien an und vl und die Diagonalen, so ist Cn = Cl = na, Cm = Ca = ma und die Seite desselben, unsere Kante C′ als Hypotenusa des rechtwinkligen Dreieckes Cv′v (Fig. LVII) $= \sqrt{(Cv)^2 + (Cv')^2}$.

Ziehen wir nun vr parallel aC, also senkrecht auf Cn, so ist $Cv = \sqrt{(Cr)^2 + (rv)^2}$. Die Werthe für diese beiden Linien finden wir nun auf folgende Weise:

In dem Dreiecke lna finden wir nach dem Theilungslehrsatze $x : y = Na : M(a + b)$

$$nv : va = nm . lC : mC . (lc + Ca).$$

Setzen wir nun hiefür die entsprechende Werthe ein, so erhalten wir $nv : va : na = (n - m)\,n : m\,(m + n) : n^2 + m^2$ *). Nun ist aber (B 8) $nv : na = rv : Ca$, also auch (A 6)

$$rv : Ca = (n - m)\,n : n^2 + m^2,$$

daraus finden wir, da $Ca = m$, $rv = \frac{mn\,(n - m)}{n^2 + m^2}$,

ferner ist $Cr : Cn = av : an = m\,(m + n) : n^2 + m^2$, also

$$Cr = \frac{mn\,(m + n)}{n^2 + m^2}.$$

Setzen wir nun diese beiden Werthe für rv und Cr in die Formel $Cv = \sqrt{(Cr)^2 + (rv)^2}$, so erhalten wir

$$Cv = \frac{\sqrt{[mn\,(m + n)]^2 + [mn\,(n - m)]^2}}{n^2 + m^2}$$

$$Cv = mn\,\frac{\sqrt{2\,(n^2 + m^2)}}{n^2 + m^2}$$

$$Cv = mn\sqrt{\frac{2}{n^2 + m^2}}.$$

Unsere Kante $C' = \sqrt{2\,(Cv)^2}$ wird dann

$$C' = \sqrt{\frac{2\,m^2\,n^2 . 2}{n^2 + m^2}}$$

$$= \frac{2\,m\,n}{\sqrt{n^2 + m^2}}.$$

*) Nach A 4 ist $nv : (va + nv) = (n - m)\,n : (n - m)\,n + m\,(m + n)$, $(n - m)\,n + m\,(m + n)$ ist aber $= n^2 - nm + m^2 + nm = n^2 + m^2$.

2) Der Kanten A′.

Die Kante A′ ist $= \sqrt{c^2 + (Cv)^2} = \sqrt{\frac{c^2 + m^2 n^2}{n^2 + m^2} \cdot 2}$

$$= \sqrt{\frac{c^2 (n^2 + m^2) + 2 m^2 n^2}{n^2 + m^2}}.$$

3) Die Neigung der Flächen in den Kanten A′ gegen einander.

Denken wir uns wieder den Winkel von einer durch c, Cv (Fig. LVII) und unsere Kante A′ gehenden Ebene halbirt, so giebt uns v′C das Verhältniss des Sinus dieses Winkels gegen das Perpendikel aus C auf unsere Kante A′ als Cosinus.

Es ist daher $\sin : \cos = mn \sqrt{\frac{2}{n^2 + m^2}} : \frac{mn \sqrt{\frac{2}{n^2+m^2}} \cdot c (B\,10)}{\sqrt{\frac{2 m^2 n^2}{n^2 + m^2} + c^2}}$

$$= \sqrt{2 m^2 n^2 + c^2 (n^2 + m^2)} : c \sqrt{n^2 + m^2}.$$

Auch für diese Körper lassen sich die ebenen Winkel sehr leicht finden, indem für die zweierlei Winkel an der Spitze und der Grundlinie das Verhältniss von sin : cos in der halben Kante C′ und der Diagonale der Fläche von c nach der Mitte der Kante C′ gezogen liegt. Die Diagonale selbst ist = der Quadratwurzel aus dem Quadrate der halben Kante C′ + dem Quadrate von c $= \sqrt{\frac{m^2 n^2 + (n^2 + m^2) c^2}{n^2 + m^2}}$.

Es ist also für den halben ebenen Endspitzenwinkel

$$\sin : \cos = \frac{mn}{\sqrt{n^2 + m^2}} : \sqrt{\frac{m^2 n^2 + (n^2 + m^2) c^2}{n^2 + m^2}}$$

$$= mn : \sqrt{m^2 n^2 + (n^2 + m^2) c^2}.$$

Setzen wir für m und n die entsprechenden Werthe, so finden wir leicht die Formeln auch für diese Hälftflächner von der Form $\frac{1}{2}(a : na : c)$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a : c)$ u. s. f., die wir hier nicht weiter entwickeln wollen.

Von den Combinationen des zwei- und einachsigen Systems.

§. 62. Wir wollen hier zunächst nur betrachten, wie an den einfachen Körpern sowohl, wie an denjenigen am häufigsten vorkommenden zusammengesetzten, welche einem einfachen Körper des regulären Systems entsprechen, die verschiedenen Körper mit ihren Flächen auftreten, und bezeichnen wieder die Coëfficienten m und n der untergeordneten Gestalt als m′ und n′, und ihr a und s als a′ und s′.

Es erscheinen

1) am Dioctaëder (ma : na : c)

1) als Zusch. der Kanten A, B und C 3 verschiedene Dioctaëderflächen an A: wenn $n' > n$, $m' = m$, an B: wenn $m' > m$, $n' < n$, an C: wenn $m' : n' = m : n$, $m' < m$,

2) als 8fl. ger. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. Poleck. — Dioctaëderflächen
wenn $m' : n' = m : n$ und $m' > m$

3) als 8fl. schief a. d. Fl. aufg. Zusp. d. Poleck. — „
wenn $m' : n' \gtrless m : n$, $m' > m$

4) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. Ecke an a — „
wenn $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$, $m' < m$

5) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. Eck. an s — „
wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$, $m' < m$

6) als ger. Abst. der Kant. B — Octaëderflächen I. Ordn.
Octaëder, deren $a' = \frac{2mn}{m+n}$

7) als 4fl. a. d. Kt. B aufg. Zusp. d. Poleck. — „ „
wenn $a' > \frac{2mn}{m+n}$

8) als a. d. Kt. B aufges. Zusch. d. Eck. an s — „ „
wenn $a' < \frac{2mn}{m+n}$

9) als ger. Abst. d. Kt. A — „ II. Ordn.
wenn $n = \infty$, $m = a'$

als a. d. Kt. A aufges. Zusch. d. Poleck. wenn $n = \infty m < a'$	Octaëderflächen II. Ordn.
als a. d. Kt. A aufges. Zusch. d. Eck. an a wenn $n = \infty m > a'$	„ „
als gerade Abstumpf. d. Poleck.	Gerade Endfläche
„ „ „ „ Eck. an s	I. Säule
„ „ „ „ „ an a	II. „
„ „ „ „ Lateralkant. wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$	8seitige Säule
als a. d. Lateralkt. aufg. Zusch. d. Eck. an s wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$	„ „
als a. d. Lateralkt. aufg. Zusch. d. Eck. an a wenn $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$	„ „

2) am Octaëder I. Ordnung (a : a : c)

als 4fl. a. d. Fl. ger. aufg. Zusp. d. Poleck. wenn $a' > a$	Octaëder I. Ordnung
als Zusch. der Lateralkanten wenn $a' < a$	„ „
als ger. Abst. der Kt. A wenn $a' = a$, $s' = 2s$	„ II. Ordnung
als 4fl. a. d. Kt. A aufg. Zusp. d. Poleck. wenn $a' > a$, $\frac{a'}{s'} = \frac{a}{2s}$	„ „
als Zusch. d. Eck. an a (a. d. Kt. A aufg.) wenn $a' < a$, $\frac{a'}{s'} = \frac{a}{2s}$	„ „
als Zusch. der Kanten A . . . . . . wenn $a = m$, $a\cdot < n$ *)	Dioctaëderfläche
als 8fl. Zusp. d. Poleck. . . . . wenn $m > a$, $n > a\cdot$	„

*) a· bedeutet hier ebenfalls das auf a rechtwinklige zweite a, das von den Flächen geschnitten wird.

8) als 4fl. Zusp. d. E. an a (a. d. Fl. aufg.) . . . Dioctaëderfläche

wenn $m < a \frac{m'}{n'} < a$.

9) als ger. Abst. der E. an c . . . . Gerade Endfläche

10) „ „ „ „ „ „ a . . . . II. 4seitige Säule

11) „ „ „ „ Kt. C . . . . I. „ „

12) „ Zusch. d. E. an a (a. d. Kt. C aufg.) . . . 8seitige „

Die Bedingungen, unter welchen die verschiedenen Körper an einander auf verschiedene Weise auftreten, bedürfen wohl keines Beweises, indem sie sich unmittelbar aus der Anschauung ergeben. Es ist bei allen vorausgesetzt, wie wir es bei dem regulären Systeme auch thaten, dass die Achsen der verschiedenen Körper als zusammenfallend gedacht sind, und dass die Hauptachse c überall gleich lang angenommen würde.

Da die hemiedrischen Formen nur selten vorkommen, und dabei meist, wenn auch in verschiedener Grösse, homoedrische Formen, d. h. rechte und linke Hälften zugleich in Combinationen auftreten, so wird man sich mit Hülfe der Erscheinungsweise der homoedrischen Combinationen leicht zu Recht finden können, zumal, wenn man dabei die Zonenverhältnisse berücksichtigt, zu deren Betrachtung wir zunächst übergehen, ohne auf die Erscheinungsweise homoedrischer Combinationen weiter einzugehen, für die wir §. 67 2 Beispiele näher entwickeln werden, die als Anhaltspunct für andere dienen können.

Zonen des zwei- und einachsigen Systems.

§. 63. I. Kantenzonen der Grundform (a : a : c).

1) Zone, deren Achse parallel der Lateralkante läuft (a ; a) oder (∞ s).

Es gehören in dieselbe ausser der Grundform selbst

1) alle Quadratoctaëderflächen I. Ordnung, da sie alle die beiden a in gleichen Entfernungen schneiden, also alle parallel a : a, parallel s laufen,

2) die gerade Endfläche (∞a : ∞a : c),
3) die Flächen der I. 4seitigen Säule (a : a : ∞c).

Aus dem Zeichen der Flächen geht es unmittelbar her-r, dass sie in diese Zone gehören, indem sie alle zwei mensionen a mit gleichem Coëfficienten haben. Da wir i dem Verfolgen dieser Zone in der Normalstellung eines ystalles, bei welcher sich c senkrecht befindet, in ver-aler Richtung um den Krystall herumgehen müssen, so isst diese Zone auch die „vertikale Zone der I. 4seitigen ule oder I. vertikale Zone." Es giebt 2 solche Zonen.

2) Zonen, deren Achse parallel der Endkante r Grundform lauft (a ; c).

Es gehören hierher ausser der Grundform alle Flächen, deren Zeichen sich das Verhältniss a : c findet, also

1) die Flächen des I. stumpferen Octaëders (a : ∞a : c)
2) die Flächen des Dioctaëders (a : na : c), wo also m = 1 n > 1 ist,
3) die Flächen des Dioctaëders (ma : a : c), wo n = 1, m < 1 ist,
4) die Flächen der II. 4seitigen Säule (a : ∞a : ∞c).

Da je 2 Endkanten parallel sind, giebt es 4 solcher nen.

3) Zone, deren Achse der Hauptachse parallel t (∞c), horizontale Zone.

Alle Flächen, in deren Zeichen ∞c vorkommt, ge-ren hierher, also

1) die I. vierseitige Säule (a : a : ∞c)
2) die II. 4seitige Säule (a : ∞a : ∞c)
3) alle 8seitigen Säulen (ma : na : ∞c).

Da wir bei der Verfolgung der Flächen, welche in ese Zone gehören, in der Normalstellung eines Krystalles horizontaler Richtung um denselben herumgehen müssen, hat diese Zone den Namen horizontale Zone er-alten.

4) Zonen, deren Achse parallel einer Dimension a laufen (∞ a).

In denselben liegen

1) das erste stumpfere Octaëder . . . . (a : ∞ a : c)
2) alle spitzeren Octaëder II. Ordnung ($\frac{1}{m}$ a : ∞ a : c)
3) alle stumpferen „ „ „ (ma : ∞ a : c)
4) die II. 4seitige Säule . . . . (a : ∞ a : ∞ c)
5) die gerade Endfläche . . . . (∞ a : ∞ a : c).

Es giebt 2 solche Zonen, da von den 4 a je 2 in einer geraden Linie liegen. — Man nennt diese Zone auch vertikale Zone der II. 4seitigen Säule, oder II. vertikale Zone.

5) Zonen, deren Achsen parallel der Diagonale der Fläche der Grundform läuft und zwar der Diagonale, die von C nach s geht. (c;s).

Es gehören in diese Zone alle Flächen, in denen sich das Verhältniss s : c findet, also ausser der Grundform

1) das I. schärfere Octaëder . . . . (∞ a : $\frac{1}{2}$ a : c)
2) die I. 4seitige Säule . . . . (a : a : ∞ c)
3) das Dioctaëder . . . . (a : $\frac{1}{3}$ a : c)
4) gewisse Dioctaëder von der Form . . . (a : na : mc)
5) gewisse Dioctaëder „ „ „ . . . (a : ma : nc).

Wir finden für die Dioctaëder-Flächen aus den Diagonalzonen dieselben Bedingungen, wie für die Flächen der Pyramiden- und Hexakisoctaëder-Würfelflächen und Leucitoidflächen aus der Diagonalzone des Octaëders im regulären Systeme. Der Pyramidenwürfelfläche (a : 2a : ∞ a) entspricht die Fläche des I. schärferen Octaëders, für die den Hexakisoctaëdern entsprechenden Dioctaëder können wir ebenfalls dieselben dreierlei Abtheilungen, wie bei dem regulären Systeme unterscheiden.

Die I. Abtheilung enthält, wie pag. 138 auseinandergesetzt wurde, Dioctaëder, die wir, um sie in Uebereinstimmung mit den dort bezeichneten Hexakisoctaëdern zu

bringen, und die dort gefundenen Bedingungen auf sie anwenden zu können, Dioctaëder von der Form (a : na : mc) nennen müssen, wie z. B. die Fläche, (g Taf. VII, Fig. 82) deren Kante B wie die Diagonale des Octaëders läuft. Wir fanden für sie die Bedingung $m = \frac{2n}{n+1}$.

Die II. Abtheilung enthält dann Dioctaëder von der Form (a : na : mc) mit der Bedingung, dass $m = \frac{2n}{n-1}$.

Die III. Abtheilung umfasst Dioctaëder von der Form (a : ma : nc) oder ($\frac{1}{m}$ a : $\frac{1}{n}$ a : c) mit der Bedingung, dass $n = \frac{2m}{m-1}$, z. B. (a : 2a : 4c) = ($\frac{1}{4}$ a : $\frac{1}{2}$ a : c); die beiden letzteren (z. B. s und e Fig. 82) gehören in die Diagonalzone der Octaëderfläche, mit welcher sie bei gleichmässiger Ausbildung aller nicht zum Schneiden kommen (wie o' Fig. 82). Diese Eigenschaft ist also versteckt und kommt nur bei ungleichmässiger Ausbildung den Flächen manchmal zum Vorschein.

6) Zone, deren Achse eine Lateralkante eines bestimmten Dioctaëders (a : na : c) ist. (a;na).

Hierher gehören alle Flächen, in denen sich das Verhältniss na : a findet, also ausser dem erwähnten Dioctaëder

1) die 8seitige Säule (a : na : ∞c)
2) alle Dioctaëder (a : na : mc), d. h. alle spitzeren, die als Zuschärfung der Lateralkante des bestimmten erscheinen,
3) alle Dioctaëder (a : na : $\frac{1}{m}$ c), d. h. alle stumpferen mit dem Verhältniss (a : na), die als 8flächige auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung der Ecken an c erscheinen.

Ausser diesen Zonen kommen keine anderen Arten im 2- und 1achsigen Systeme vor. Die Kanten und Diagonalzonen der Quadratoctaëder II. Ordnung sind keine neuen

Zonen, denn da, wie wir sahen, die Kante eines Octaëders stets läuft, wie die Diagonale seines nächsten stumpferen, und seine Diagonale wie die Kante seines nächsten spitzeren Octaëders, so geht daraus hervor, dass die Zonenachsen der Quadratoctaëder II. Ordnung mit denen I. Ordnung zusammenfallen und nur in Beziehung auf ihre Benennung an den Octaëdern verschiedener Ordnung ein Unterschied Statt findet.

In Beziehung auf die Zonen der hemiedrischen Gestalten gilt dasselbe, was wir für die Zonen der hemiedrischen Gestalten im regulären Systeme erwähnten. Es bleiben die Zonenachsen natürlich dieselben, zugleich auch grösstentheils die Bezeichnung, da die Kanten des Tetraëders parallel den Kanten des Octaëders laufen, die Diagonale des Tetraëders gleiche Lage mit der Diagonale ihres Octaëders hat u. s. f.

§. 64. *Von der Berechnung der Gestalten.*

Da in dem 2- und 1achsigen Systeme die 3 Achsen nicht mehr gleich sind, so ist es die nächste Aufgabe das Verhältniss von a : c für ein beliebiges Octaëder einer Mineralspecies zu berechnen, um daraus die Parameterwerthe für die übrigen Flächen abzuleiten. Dieses Verhältniss ist nun bei den verschiedenen Mineralspecies, die zu diesem Systeme gehören, ein sehr mannichfaltiges. Die krystallographischen Linien fanden wir bei dem regulären Systeme meistens am einfachsten durch Quadratwurzelgrössen ausdrückbar. Auch in diesem Systeme lässt sich das Verhältniss von a : c am einfachsten in Quadratwurzeln ausdrücken. In vielen Fällen können wir zweifelhaft sein, welche Form wir als Grundform, als Grundoctaëder wählen wollen, um daraus das Verhältniss von a : c und die Ableitungszahlen für die übrigen an dieser Species beobachteten Flächen zu finden.

Auch hier werden uns die mehr oder weniger verwickelten, von einfachen Zahlen sich entfernenden Verhältnisse, die wir bei der Wahl einer bestimmten Gestalt als Grund-

gestalt für die Ableitungszahlen der übrigen Flächen finden, bald belehren, ob wir nicht mit Zugrundelegung einer andern Form als Ausgangspunct einfachere Verhältnisse bekommen. So können wir z. B. bei Taf. VII, Fig. 75 ebensowohl die Flächen d, $\frac{2}{3}$ d, $\frac{1}{3}$ o als Grundoctaëder annehmen. Giebt uns nicht die Natur selbst durch äussere Kennzeichen schon einen Wink, von welcher Form wir wohl am schicklichsten die übrigen ableiten, indem allenfalls nach gewissen Flächen die Krystalle sich am leichtesten spalten lassen, oder gewisse Flächen stets die vorherrschenden, ausgedehntesten sind, so bleibt uns eben nur übrig durch Berechnung der verschiedenen Verhältnisse und Ableitungszahlen unter verschiedenen Voraussetzungen das möglichst einfache zu finden. Es kann dabei selbst vorkommen, dass wir von gar keiner der an einem Mineral bisher beobachteten Flächen als Grundgestalt die andern ableiten, sondern eine Grundform supponiren, die gar nicht vorkommend bisher angetroffen wurde, und aus ihr alle beobachteten Flächen ableiten. So gezwungen dies auch für den ersten Anblick erscheinen mag, so hat es doch ebensowenig befremdliches, als die Wahrnehmung, dass auch unter den Krystallen des regulären Systemes manche vorkommen, an denen die Octaëderflächen selbst nicht beobachtet wurden, die wir doch auch für alle als Ausgangspunct wählen müssen.

Was nun die Berechnung des Verhältnisses von a : c betrifft, so ist dieses leicht aus einem der Kantenwinkel zu finden.

Wir wählen z. B. an der Taf. VII, Fig. 82 dargestellten Combination des Vesuvianes die Flächen o zum Grundoctaëder und fänden den Winkel von o : o in der Endkante zu 129° 31′. Wir hatten für den halben Kantenwinkel (pag. 164) gefunden

$$\sin : \cos = \frac{\sin}{\cos} = \mathrm{Tg} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c}.$$

Setzen wir hier c = 1, so ist $tg = \sqrt{a^2 + 1}$, $tg^2 = a^2 + 1$.

$$\text{Nun ist lg . tg} . \frac{129^0, 31'}{2} = 10{,}3265610$$
$$\frac{2}{20{,}6531220} = \text{lg . tg}^2 = \text{lg} . 4{,}499,$$

$$\text{also } 4{,}499 = a^2 + 1,\ 3{,}499 = a^2$$
$$\sqrt{3{,}499} = a.$$

Bringen wir nun die geringe Correction an, dass wir statt 3,499 3,5 setzen — und unsere Messungen können nie den Grad der Sicherheit erreichen, dass wir nicht dergleichen unbedeutende Correctionen anwenden dürfen, — so erhalten wir $\sqrt{3{,}5} = \sqrt{\frac{7}{2}} = a$, also $a : c = \sqrt{\frac{7}{2}} : 1 = \sqrt{7} : \sqrt{2}$.

Um nun bemessen zu können, wie viel die vorgenommene Correction beträgt, ob sie nicht doch bedeutender sei, als der Grad von Genauigkeit, den unsere Messungen erreichen, sie anzunehmen zulässt, berechnen wir den Winkel, wie er nach dieser Correction sein müsste. In unserem Falle hier finden wir dann

$$3{,}5 = a^2,\ \text{also } 4{,}5 = a^2 + 1 = \text{lg tg}^2 = 0{,}6532125$$

und lg tg = 0,3266062 = lg tg 64°,45′ 38″. Unser ganzer Kantenwinkel wird daher = 129° 31′ 16″. Die Differenz zwischen dem Winkel nach der directen Messung und dem, wie ihn unsere Correction angiebt, beträgt daher nur 16″, eine Abweichung, die so unbedeutend ist, dass wir sie wohl als durch einen Messungsfehler bedingt annehmen, und daher die Annahme des Verhältnisses von $a : c = \sqrt{7} : \sqrt{2}$ als richtig betrachten dürfen.

Für die Art und Weise, wie man aus den Combinationskantenwinkeln die Parameterwerthe der verschiedenen Flächen findet, gilt ganz dasselbe, was schon bei dem regulären Systeme (pag. 144) erwähnt wurde. In den meisten Fällen gestalten sich hier die Berechnungen einfacher, weil die Vielheit der Flächen in diesem Systeme in der angegebenen Weise reducirt ist, und wir meistens im Stande sein werden,

en solchen Kantenwinkel zu messen, der uns in den Stand
zt, durch eine einfache Rechnung daraus einen Kanten-
nkel oder einen Neigungswinkel der unbekannten Gestalt
bst zu finden, so dass wir uns selten der verwickelteren,
niger einfachen Formel, wie sie für die Combinations-
ntenwinkel im Allgemeinen pag. 149 angegeben ist, zu be-
nen haben werden.

Eine nähere Betrachtung einiger verwickelteren Com-
ationen aus diesem Systeme wird uns hiefür wie für die
nützung der Zonenverhältnisse zur Berechnung der Flächen
hrere Beispiele liefern.

§. 65. *Combination des Zirkones*

(Taf. VI, Fig. 65.)

Wählen wir die Fläche o als die Fläche des Grund-
taëders, so ist d gleich seinem ersteren stumpferen, g die
Säulenfläche, c die Fläche der II. Säule, x, y, z Dioctaëder-
ichen aus der Kantenzone des Octaëders o, u die Fläche
nes spitzeren Octaëders I. Ordnung. Für den Endkanten-
inkel des Grundoctaëders findet sich A = 123°, 22′ und
raus das Verhältniss von a : c = $\sqrt{22} : \sqrt{9}$ *) Misst man
n den Winkel von u gegen g, so findet man denselben
159°, 46′, davon 90° abgezogen, giebt uns den halben
teralkantenwinkel dieses Octaëders zu 69°, 46°, und daraus
s Verhältniss des Cosinus für den Neigungswinkel gegen c,
i gleichem Sinus s mit der Fläche o = 3 : 1; u ist dem-
ich = (a : a : 3 c).

*) Es liegt nahe, für dieses Verhältniss ein anderes zu wählen. Nähmen wir an, es sei = $\sqrt{21} : \sqrt{9} = \sqrt{7} : \sqrt{3}$, so würde der Winkel = 122°, 34′, 42″, die Differenz also = 47′, 18″ nähmen wir statt $\sqrt{22} : \sqrt{9} = \sqrt{44} : \sqrt{18}$ dafür $\sqrt{45} : \sqrt{18} = \sqrt{5} : \sqrt{2}$, so würde er 123, 44′, 56″, die Differenz also = 22′ 56″. Die Correction wäre in beiden Fällen also so bedeutend, dass sie mit der Messung zu wenig überein-stimmen würde, um sie annehmbar erscheinen zu lassen.

Die 3 Dioctaëder gehören alle in die Kantenzone des Grundoctaëders; es muss in ihrem Zeichen also das Verhältniss von a : c vorkommen, sie sind alle spitzer als das Grundoctaëder, also von der Form (a : ma : mc) oder was dasselbe ist (a : $\frac{1}{m}$ a : c) die Fläche u bildet mit den 2 benachbarten z parallele Kanten. Es gehört also unsere Fläche z in eine Zone mit der Fläche (a : a : 3 c), und zwar in die Diagonalzone derselben, die Fläche u stumpft also die Kante B des Dioctaëders z ab. Die Diagonale der Fläche u läuft von 3 c nach s oder von c nach $\frac{1}{3}$ s. Wird daher unsere Fläche durch die Endkante des Octaëders, die von a nach c geht gelegt und soll sie zugleich in die Diagonalzone der Fläche u gehören, also durch $\frac{1}{3}$ s gehen, so schneidet sie von dem 2ten a ein Stück ab = $\frac{1}{5}$ *). Sie hat also den Werth (a : 5 a : 5 c) oder ($\frac{1}{5}$ a : a : c).

Die Dioctaëderfläche x wird von der Fläche u parallel ihren Kanten A zwischen x und x' (Fig. 65) geschnitten, es gehört also die Fläche u in die Kantenzone des Dioctaëders x oder was dasselbe ist, die Fläche x in die Kantenzone der Fläche u. Die Kante A des Dioctaëders x läuft also, wie die Endkante des Octaëders u, d. h. von a nach 3 c oder c nach $\frac{1}{3}$ a. Sie muss also in ihrem Zeichen das Verhältniss a : 3 c, als zur Kantenzone des 3fach schärferen Octaëders gehörig, haben, aber auch das Verhältniss a : c, als zur Kantenzone des Grundoctaëders gehörig. Daraus geht hervor, dass die Fläche x = (a : 3 a : 3 c) oder was dasselbe ist ($\frac{1}{3}$ a : a : c) sein muss. Beide Verhältnisse finden sich wirklich in diesen Zeichen, da 3 a : 3c = a : c und

*) Diesen Werth finden wir leicht auf folgende Weise nach der Formel x : y = Na : M (a + b), indem hier (Taf. VI) $a\gamma = a = \gamma\varepsilon = b$, $C\beta = N$, $\beta\gamma = M$, $C\delta = x$, $\delta\varepsilon = y$ der Formel entspricht, also x : y (da N : M = $\frac{1}{3}$s : $\frac{2}{3}$s = 1 : 2 und a = b) = 1 : 4; da nun x + y = 1, so ist x, d. h. unser $C\delta = \frac{1}{5}$, wie oben.

$\frac{1}{3}$a : c = a : 3c ist. Es bleibt uns nur noch die Fläche y zu bestimmen, was wieder mittelst seiner Messung geschehen muss. Man findet dann für sie den Winkel von y gegen a = 155°, 7′ und daraus den Werth für m = 4. Es besteht also diese Combination aus folgenden dreierlei Arten von Flächen:

1) Octaëderflächen: o = (a : a : c) u = ($\frac{1}{3}$a : 3a : c) d = (a : ∞a : c)
2) Säulenflächen: g = (a : a : ∞c) a = (a : ∞a : ∞c)
3) Dioctaëderflächen x = ($\frac{1}{3}$a : a : c) y = ($\frac{1}{4}$a : a : c) z = ($\frac{1}{5}$a : a : c)

Tafel VI sind diese Flächen, sämmtlich durch 1 c gelegt gedacht, auf der durch die beiden a gelegten Fläche projicirt. Man übersieht hieraus augenblicklich die verschiedenen Zonenverhältnisse. So haben die 3 Dioctaëderflächen, das erste stumpfere und das Grundoctaëder und die durch c gelegte II. Säulenfläche, welche alsdann wie die Dimension a läuft, die Linie von c nach 1 a gemeinschaftlich, schneiden sich also alle in dieser Linie als ihrer gemeinschaftlichen Zonenachse. Ebenso sieht man, dass die Dioctaëderfläche z in die Diagonalzone und x in die Kantenzone des 3fach spitzeren Octaëders gehört, indem erstere die Octaëderfläche ($\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{3}$a : c) gerade in $\frac{1}{3}$s schneidet, also mit ihr die Linie von c nach $\frac{1}{3}$s, d. h. die Diagonale dieser Octaëderfläche gemeinschaftlich hat, letztere die Linie $\frac{1}{3}$a : c, also die Kante dieses Octaëders.

Alle spitzeren Dioctaëder aus der Kantenzone eines Octaëders müssen an diesem als 4flächige Zuspitzungen seiner Lateralecken erscheinen und ihre Combinationskanten müssen den Endkanten des Octaëders parallel laufen (Fig. LXII). Denken wir uns nun das Eck an a abgestumpft, also die II. Säule hinzutretend, so wird diese ebenfalls der Endkante des Octaëders parallel laufen, wie die Linien b d e (Fig. LXII). Es sei nun Fig. LXIII a x f ein Durchschnitt in der Richtung der Linie a x f von Fig. LXII, so sieht man wie ∢ f x a = dem Winkel der Dioctaëderfläche gegen die II. Säulenfläche ist und ∢ f x a — 90° = dem Neigungs-

winkel der Fläche gegen die Dimension a wird, woraus wir aus dieser Neigung nach den angegebenen Formeln m finden.

§. 66. *Combination des Vesuvianes.*

Taf. VII, Fig. 82 stellt eine solche holoedrische, aus 14 verschiedenen Arten von Flächen zusammengesetzte Combination dar. Wählen wir o als Grundoctaëder, so ist unmittelbar ersichtlich, dass h die gerade Endfläche, b und r zwei spitzere Octaëder I. Ordnung, d das erste stumpfere Octaëder II. Ordnung, g die Iste, a die IIte 4seitige Säule sei. Ebenso erkennt man, dass x, s und z, y und e spitzere Dioctaëder, und l und f Flächen einer 8seitigen Säule sind. Betrachten wir zunächst die verschiedenen Zonen, die sich uns aus dem Kantenparallelismus zu erkennen geben, so haben wir

1) die Kantenzone des Grundoctaëders und in ihr die Flächen d, o, z, s, x, a,
2) die Diagonalzone des Octaëders, und in ihr die Fläche y,
3) die vertikale Zone der 8seitigen Säule f mit den Flächen f, e, z,
4) die Kantenzone eines Dioctaëders mit den Flächen a, e, b, z,
5) die vertikale Zone des Dioctaëders y mit den Flächen y und s,
6) die I. vertikale Zone mit den Flächen h, o, b, r, g.

Für die Grundgestalt finden wir den Kantenwinkel in A $= 129^{\circ}, 31'$ und daraus das Verhältniss von $a : c = \sqrt{7} : \sqrt{2}$, wie es pag. 200 entwickelt wurde.

Misst man den Winkel, den b mit g und a mit f macht, so findet man daraus den Werth m für $b = 2$, also $b = (\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : c)$ und für f $(a : 2a : \infty c)$.

Es muss daher auch e und z, als zur vertikalen Zone von f gehörig, das Verhältniss $(a : 2a')$ enthalten. z, als zur Kantenzone des Octaëders, muss aber auch das Verhältniss

a· : c *) enthalten. Da z spitzer als c ist, so muss es der Form $(a : \frac{1}{m}a : c)$ entsprechen. Es kann daher z nur das Dioctaëder von der Form $(a : \frac{1}{2}a : c)$ oder (2a : a : 2c) sein, worin sich das Verhältniss von a : c und von a : 2a· findet.

Das Dioctaëder e, ebenfalls in die erwähnte vertikale Zone von f gehörend, muss also ebenfalls das Verhältniss von a : 2a· enthalten, da es aber zugleich parallele Kanten zwischen a und b und mit z bildet, so gehört es in die Kantenzone von b, d. h. von $(\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : c)$ oder (a : a : 2c). Es muss also auch das Verhältniss a· : 2c *) enthalten, und von der Form (a : ma : nc) sein. Es kann daher nur das Dioctaëder (a : 2a : 4c) oder $(\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a : c)$ sein.

e bildet ferner parallele Kanten mit x und r, und zwar parallel der Kante A von x. Es muss also x, e und r, das Verhältniss dieser Kante xa : c gemeinsam haben. Diese Kante A läuft aber an e von a nach 4c, es muss also in x wie in r das Verhältniss a : 4c sich finden; r als ein spitzeres Octaëder I. Ordnung bestimmt sich daraus sogleich als das mit dem Werthe (a : a : 4c) oder $(\frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a : c)$. Von x wissen wir ferner, dass es auch zur Kantenzone des Grundoctaëders gehört, also auch das Verhältniss a· : c haben muss. Es kann daher kein anderes, als das Dioctaëder von der Form (a : 4a : 4c) oder $(\frac{1}{4}a : a : c)$ sein, indem, wenn a : c = 1 : 4 und a· : c· = 1 : 1 sein soll, a : a· : c = 1 : 4 : 4 wird; die Fläche des Dioctaëders y gehört in die Diagonalzone des Octaëders c, und zwar zur ersten Abtheilung (pag. 197), wofür wir die Bedingung fanden $\frac{2n}{n+1} = m$. Zu gleicher Zeit erscheint

*) Man beachte, wie oben bei z, dabei die Zeichen von a, um in der Rechnung keinen Fehler zu begehen; wir haben nehmlich hier das Verhältniss von a : 2a· und a· : 2c, nicht a : 2c, d. h. es ist die Kante von c nach der Dimension a· des Octaëders b, nicht die von c nach a, in deren Zone unsere Fläche gehört.

sie aber auch als gerade Abstumpfung der Kante zwischen d und z, d. h. zwischen der Fläche, die dem Granatoëder und der, welche dem Leucitoëder des regulären Systems entspricht, sie gehört also in die Kantenzone von $(a : \infty a : c)$ und zwar der von 2 s·′ nach c· laufenden Kante Fig. LXIV und entspricht also der Fläche $(3a : a : \frac{3}{2}c)$ oder $(2a : \frac{2}{3}a : c)$. Aus Fig. LXIV ist dies ebenfalls leicht zu beweisen. Ziehen wir nehmlich, die Fläche durch 1 c gelegt gedacht, ihre Projectionslinie von 2 s·′, welchen Punct sie treffen muss, als zur Kantenzone des I. stumpferen Octaëders (Granatoëders im regulären Systeme) gehörig, nach 1 s, was sie als zur Diagonalzone des Grundoctaëders gehörig, abschneiden muss, so ist nach der Formel

N : M = x (a + b) : ya hier Cr : ra = Cs (2 s·′a + a 2s) : s 2 s . 2 s·′a. Daraus wird, da Cs = s 2 s = der Dimension s, 2 s·′ a = a 2 s = der Dimension a, Cr : ra = s . 2a· : s a = 2 : 1,

also Cr = $\frac{2}{3}$ a. Ferner ist a·′ n parallel 2 s·′ 2 s und Cs = s 2 s, folglich, da ∢ x = y (B 1), ∢ w = t (B 2), △ Csn = 2 s s 2 s·′ (B 5) also Cn = 2 s·′ 2 s = 2 a, folglich unsere Fläche = $(\frac{2}{3}a : 2a : c)$. Für die Fläche s, die zur Lateralkantenzone von y gehört und zugleich in die Endkantenzone von c, also das Verhältniss a : 3 a· und c : a· haben muss, finden wir daher die Werthe (a : 3 a : 3 c) oder $(\frac{1}{3}a : a : c)$. Misst man den Winkel von 1 gegen a, der 161°, 34′ beträgt, so findet man daraus den $\frac{1}{2}$ Kantenwinkel der Säule, den 2 von a nach m a laufende Flächen an m a bilden würden zu 161°,34′ — 90° = 71,34 und daraus m = 3. Die Säule ist also $(a : 3a : \infty c)$.

Die Combination besteht demnach aus folgenden Flächen:

1) Octaëder I. Ordnung

o = (a : a : c)   b = $(\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : c)$ r = $(\frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a : c)$

2) Octaëder II. Ordnung

d = $(a : \infty a : c)$

3) Säulenflächen

$g = (a : a : \infty c)$ $a = (a : \infty a : \infty c)$ $f = (a : 2a : \infty c)$
$l = (a : 3a : \infty c)$

4) der geraden Endfläche $h = (c : \infty a : \infty a)$

5) Dioctaëderflächen

$z = (\frac{1}{2}a : a : c)$ $s = (\frac{1}{3}a : a : c)$ $x = (\frac{1}{4}a : a : c)$
$y = (\frac{1}{3}a : 2a : c)$ $e = (\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a : c)$.

Taf. VII stellt in derselben Weise die Projection aller er erwähnten Flächen des Vesuvianes dar. Man wird soeich bemerken, welch ein Reichthum von Zonenverhältssen noch ausser den erwähnten hier zu beobachten ist, dem sämmtliche Flächen, deren Projectionslinien sich in nem Puncte schneiden, in eine Zone gehören, deren Achse m diesem Puncte nach 1 c geht. So erkennt man z. B., ss ausser y auch noch s und e in die Diagonalzone des rundoctaëders gehören, und zwar jenes in die erste, diese eiden in die dritte Abtheilung der in die Diagonalzone gehörigen Flächen, dass y und z in die Kantenzone des I. stumpsten Octaëders gehören u. s. f. Diese Zonenverhältnisse ind zwar an unserer Fig. 82 nicht wohl zu beobachten, eil hier sämmtliche gleiche Flächen in gleicher Grösse und n Gleichgewicht gegen einander dargestellt sind. In der atur dagegen, wo sich oft eine Fläche unverhältnissmässig er die andere ausdehnt, kommt sie oft zum Durchschnitt it anderen Flächen, mit denen sie bei regelmässiger Ausehnung sich nicht in einer Kante schneiden würde. Daurch kommen dann oft dieselben Zonenverhältnisse zum orschein, die sich auf unserer Taf. VII finden, und erleichrn uns ebenfalls das Bestimmen der Parameterwerthe der lächen. So kann es z. B. leicht in der Natur vorkommen, ass s mit der Fläche o′ zum Schneiden kommt, wenn sich eide stärker ausdehnen, woraus man dann erkennen kann, ass s auch in die Diagonalzone von o′ gehört. Dadurch üssten wir nun auch augenblicklich, dass die Fläche s erstens

zur Kantenzone von der Fläche o′ des Grundoctaëders, und zugleich zur Diagonalzone des Grundoctaëders dritter Abtheilung gehörend, die Fläche ist, welche dem niederen Leucitoide entspricht und die Werthe (a : $\frac{1}{3}$ a : c) hat.

Auch bei dem untergeordneten Auftreten hemiedrischer Flächen an homoedrischen Gestalten kommen die Erscheinungen, wie sie bei übermässiger Ausdehnung einzelner Flächen von homoedrischen Combinationen vorkommen, in derselben Weise noch viel häufiger vor und es zeigen sich an ihnen diese bei homoedrischer, gleichmässiger Flächenausbildung versteckten Zonenverhältnisse oft in einer überraschenden Deutlichkeit.

§. 67. *Hemiedrische Combinationen.*

Fig. 78 stellt eine geneigtflächig hemiedrische Combination des Kupferkieses dar. Wählen wir $\frac{o}{2}$ als Grundgestalt, als rechtes Tetraëder, so sind die Flächen $\frac{o'}{2}$, die untergeordneten Flächen des linken Tetraëders. Die Fläche 2 d gehört in die Diagonalzone von $\frac{o}{2}$ sowohl, wie von $\frac{o'}{2}$, entspricht also dem I. schärferen Octaëder, ist II. Ordnung und hat den Werth ($\frac{1}{2}$a : ∞a : c). Diese Flächen erscheinen vollzählig, weil sie einem anderen Hemiedriegesetze unterworfen sind, als die Flächen $\frac{o}{2}$, g erscheint als gerade Abstumpfung der Lateralkante zwischen $\frac{o}{2}$ und $\frac{o'}{2}$, ist also die Fläche der I. Säule und daher ebenfalls vollzählig vorhanden. Die Flächen $\frac{do}{2}$ gehören einem Dioctaëder aus der Endkantenzone von $\frac{o}{2}$ an und erscheinen ebenfalls hemiedrisch, aus ihrem Kantenwinkel von $\frac{do}{2}$: $\frac{do}{2}$ findet man leicht nach der für diesen Winkel gefundenen Formel den Werth für $m = 5$ und da es zur Kantenzone von p gehört, muss es von der

Form (a : ma : mc), d. h. ein dem Leucitoid entsprechender Körper sein. k ist daher = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$ a : a : c).

Taf. VII, Fig. 76 und 77 stellt eine parallelflächig hemiedrische Combination des Tungsteines (Ca $\dddot{W}$ dar.

Weil die Flächen des Octaëders nicht der parallelflächigen Hemiedrie unterliegen, so erscheinen auch dieselben vollzählig. Für die Flächen o findet man den Winkel in der Endkante = 108°,12′ und das Verhältniss von a : c = $\sqrt{10} : \sqrt{11}$. Die Flächen 2 d schneiden o und o parallel der Diagonale, sind also die Flächen des I. schärferen Octaëders = ($\frac{1}{2}$ a : ∞ a : c). Die Flächen x erscheinen als Abstumpfung der Kanten zwischen 2 d und o, gehören also ebenfalls zur Diagonalzone des Grundoctaëders und zwar zur ersten Abtheilung, wofür wir die Bedingung haben (pag. 138) $m = \frac{2n}{n+1}$. Misst man nun noch den Winkel von x : 2 d, so findet man daraus den Werth für n = 3, woraus m = $\frac{3}{2}$ wird. Es ist also x = $\frac{1}{2}$ (a : 3a : $\frac{3}{2}$c) = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$a : 2a : c). Die Fläche y gehört ebenfalls zur Diagonalzone von o und zwar in unsere III. Abtheilung, ist also von der Form (a : ma : nc), wofür wir pag. 140 die Bedingung fanden $n = \frac{2m}{m-1}$. Misst man nun noch den Winkel von y : o, so findet man daraus für n den Werth 4 und für m dann den Werth 2. Es ist also y = $\frac{1}{2}$ (a : 2a : 4c) = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$a : $\frac{1}{2}$a : c).

Fig. 77 stellt eine Combination desselben Minerales vor, an welcher das stumpfere Octaëder $\frac{o}{2}$, und die Fläche eines stumpferen Octaëders II. Ordnung neu hinzugetreten sind. Messen wir den Lateralkantenwinkel von $\frac{o}{2} : \frac{o}{2}$, so finden wir denselben zu 73°,8, während der von o : o in der Lateralkante 112° 2′ beträgt. Nun ist aber sin : cos, d. h. $\frac{\sin}{\cos}$ = tg des halben Kantenwinkels C von (a : a : c) nach pag. 165 $= \frac{c}{s}$, desselben der Kante C′ von (ma : ma : c) aber $= \frac{c}{ms}$;

es verhält sich also $\operatorname{tg} C : \operatorname{tg} C' = \frac{c}{s} : \frac{c}{ms} = m : 1$. Nun ist $\lg \operatorname{tg} \frac{112^0,2'}{2} = 10,1712851$, $\lg \operatorname{tg} \frac{75^0,8'}{2} = 9,8702653$. Daraus finden wir $\operatorname{tg} \frac{112^0,2'}{2} = 1,4835\ldots$ und $\operatorname{tg} \frac{73^0,8'}{2} = 0,74176\ldots$ Es ist aber $1,4835 : 0,74176 = 2 : 1 = m : 1$, für unser Octaëder $\frac{o}{2}$ wird also $m = 2$, sein Zeichen also $(2a : 2a : c) = (a : a : \frac{1}{2} c)$. Aus dem Parallelismus der Kante zwischen c und 2d mit der Lateralkante von 2d zeigt sich, dass c einem Octaëder II. Ordnung angehöre, man sieht zugleich, dass die Kanten zwischen c, $\frac{o}{2}$ und 2d', d. h. zwischen einem linken c und rechten 2d' einander parallel sind. $\frac{o}{2}$ ist $(2a : 2a : c)$, $2d = (\frac{1}{2} a : \infty a : c)$. Es sei nun (Fig. LXXVIII) $d'\delta$ die Projection unserer Fläche 2d durch 1c gelegt gedacht in unserer bisherigen Weise, $c\gamma$ die unserer Fläche $\frac{o}{2}$. Unsere Fläche c soll in eine Zone mit diesen beiden Flächen gehören, zugleich als Octaëder II. Ordnung parallel einem a laufen, ziehen wir nun parallel a durch den Durchschnittspunct der Flächen $d'\delta$ und $c\gamma$ eine Linie, so giebt uns diese die Projection unserer Fläche c, indem die allen 3 gemeinschaftliche Zonenachse von dem Endpuncte 1c nach ε läuft. Den Werth für a finden wir dann $= \frac{3}{2}$, c also $= (\frac{3}{2} a : \infty a : c)$, da $\beta\varepsilon$ parallel $C\gamma$, $\zeta\varepsilon$ parallel Cc, also $\beta\varepsilon = C\zeta = \frac{1}{2} a$, so ist $c\beta : \beta\varepsilon = cC : C\gamma = 1 : 1$, da nun $\beta\varepsilon = \frac{1}{2} a$, so ist $c\beta = \frac{1}{2} a$, also $C\beta = 2a - \frac{1}{2} a = \frac{3}{2} a$.

Ein- und einachsiges System.

Zwei- und zweigliedriges System (Weiss). Rhombisches System (Naumann und Breithaupt). Prismatisches System (Mohs).

§. 68. Die verschiedenen Namen dieses Systemes rühren von verschiedenen in demselben wahrnehmbaren Eigenschaften her. Ein- und einachsiges System heisst es, weil es gar keine gleichen Achsen mehr hat, sondern jede von der andern verschieden ist. Weil aber jede Achse in ihren beiden Hälften sich vollkommen gleich verhält nach oben und unten, vorne und hinten, rechts und links, so erscheint jede durch den Mittelpunct in 2 vollkommen gleiche Theile oder Glieder getheilt. Während bei dem regulären Systeme alle diese Theile gleich waren, so waren bei dem zwei- und einachsigen nur noch 4 gleiche Glieder und die beiden andern für sich verschieden von den 4 andern; in diesem Systeme sind nicht mehr als 2 Glieder einander gleich. Die Bezeichnung der Systeme, die von den Achsen, wie von den Gliedern hergenommen ist, giebt nun die der gleichen Achsen oder gleichen Glieder in einer Weise an, dass man daraus die Eigenschaft derselben erkennen kann, lässt aber der Kürze wegen eines dieser Glieder unerwähnt, das man sich leicht hinzudenken kann und über dessen Beschaffenheit wir nicht im Unklaren sein können. Statt ein-, ein- und einachsiges oder zwei-, zwei- und zweigliedriges System, wie es vollständig heissen sollte, bedient man sich daher der Kürze wegen der angegebenen Namen. Den Namen rhombisches System hat es davon, weil die 3 Hauptdurchschnitte durch je 2 Achsen immer Rhomben sind; die Bezeichnung prismatisches von dem Vorherrschen verschiedener Prismenflächen bei den zu diesem System gehörigen Krystallen.

Da die 3 Achsen dieses Systemes untereinander ungleich sind, so ist es hier vollkommen einerlei, welche derselben

man als Hauptachse wählen will *), nur muss man, wenn man sich einmal eine solche gewählt hat, für sämmtliche Gestalten und Flächen einer Mineralspezies dieselbe Achse als Hauptachse beibehalten. Wegen der Verschiedenheit der Achsen bezeichnen wir dieselben mit a, b und c, und zwar nennen wir stets die Hauptachse c, b die grössere, a die kleinere Nebenachse und denken uns die Krystalle stets in einer Stellung, dass c senkrecht und eine der Nebenachsen, in der Regel a, nach dem Beschauer gerichtet gedacht wird.

§. 69. Auch in diesem Systeme sind, wie in jedem dreiachsigen, dieselben Arten von Flächen möglich, wie in dem regulären Systeme. Da aber die 3 Achsen stets verschiedene Länge haben, so ist innerhalb jedes Raumoctanten stets nur ein Punct möglich, der sich in einer bestimmten Lage zu dem Mittelpuncte und den 3 Achsen befindet, es finden sich nicht mehrere Puncte in einem Octanten, die eine gleiche Lage haben, es lässt sich daher durch keine Ebene der Raum eines Octanten in congruente Hälften mehr theilen, das Maximum von gleichartigen Flächen in diesem Systeme kann daher nie mehr als 8 betragen.

Gehen wir nun von der Grundgestalt, dem ein- und einachsigen Octaëder, aus, so lassen sich von denselben die verschiedenen Arten von Flächen auf folgende Weise ableiten.

§. 70. I. Flächen, welche alle drei Achsen schneiden.

1) Das Octaëder (a : b : c) (Taf. VIII, Fig. 83).

Es hat 8 Flächen, 12 Kanten, 6 Ecken.

*) So stellt Fig. 88, Taf. VIII eine Combination des Schwerspathes vor, deren sämmtliche Flächen wieder in der Taf. IX, Fig. 99 dargestellten Combination enthalten sind. Auf Taf. VIII ist aber die Stellung so gewählt, dass was hier als senkrechte Achse c angenommen wurde, auf Taf. IX als horizontale a angesehen wird.

Die Flächen sind stets ungleichseitige Dreiecke, die Kanten sind dreierlei: 4 Lateralkanten C zwischen den Dimensionen a und b, 4 stumpfere Endkanten A zwischen den Dimensionen a und c, 4 schärfere Endkanten B zwischen den Dimensionen b und c. Je 4 gleiche Kanten bilden die Seiten eines Rhombus, der durch die 2 Dimensionen bezeichneten gelegt ist, d. h. die 3 Rhomben sind die dreierlei Hauptdurchschnitte des Octaëders.

Die Ecken sind ebenfalls dreierlei, 2 symmetrische zwei- und zweikantige oben und unten an c, zwei dergleichen vorn und hinten an a, und zwei dergleichen rechts und links an b.

2) Die Octaëder (a″: b″: c″) *).

Wir haben schon erwähnt, dass das Maximum der gleichartigen Flächen in diesem Systeme 8 sei. Es werden also alle den Leucitoiden, Pyramidenoctaëdern und Hexakisoctaëdern entsprechenden Körpern nur als Octaëder auftreten können, die nur nach der Art und Weise, wie sie mit anderen Flächen, namentlich am Grundoctaëder, auftreten, ihre eigentliche Natur erkennen lassen. Es sind daher hier möglich Octaëder von der Form

(a : mc : c) (a : b : mc) (a : mb : nc) (a : nb : mc)
(a : mb : mc) (b : ma : c) (b : ma : mc) (b : ma : nc)
(b : na : mc) (c : ma : nb) (c : ma : mb) (c : na : mb),

also solche, bei denen je eine Achse a, b oder c denselben Werth behält, wie die Grundform, die beiden andern Achsen aber alle möglichen Werthe zwischen o und ∞ annehmen können.

*) Die Striche sollen anzeigen, dass der Werth für a, b und c ganz unbestimmt sei, dass jede Dimension jeden Werth zwischen o und ∞ haben könne.

§. 71. II. Flächen, welche 2 Achsen schneiden und der dritten parallel laufen.

Es gehören hierher alle die Flächen, welche im regulären Systeme zur Kantenzone des Würfels gehören, also die dem Granatoëder und den Pyramidenwürfelflächen entsprechenden Gestalten, alle Flächen also, welche senkrecht auf einer der 3 Hauptdurchschnittsebenen stehen und die beiden zu demselben gehörigen Achsen schneiden. Da wir nun 3 von einander stets verschiedene Durchschnitte haben, so werden wir auch dreierlei Arten von solchen Flächen haben, die stets zu 4 zusammentreten und mit ihren Flächen dieselben Winkel in ihren Kanten bilden müssen, wie die 4 gleichen Kanten eines beliebigen Rhombenoctaëders, das dieselben Werthe für 2 Achsen hat, wie diese. Es werden mit andern Worten stets rhombische Prismen auf diese Weise entstehen, die den dreierlei Rhomben, welche von den Kanten eines Rhombenoctaëders gebildet werden, entsprechen. Die rhombischen Prismen können wir uns daher durch gerade Abstumpfung von je 4 gleichen Kanten eines solchen Octaëders entstanden denken. Da in der Ebene zwischen 2 Achsen ebensowenig wie in dem Raume zwischen je 3 2 Puncte gefunden werden können, die eine gleiche Lage im Verhältniss zu den 2 oder 3 Achsen haben, so erklärt sich daraus, warum keine 2 gleichen Flächen, senkrecht auf dem Hauptdurchschnitte, zwischen je 2 Grunddimensionen vorkommen können, warum also nur 4 und nicht 8 gleiche Flächen — wie bei den Pyramidenwürfeln oder den 8seitigen Säulen des zwei- und einachsigen Systemes — vorkommen können. Es treten an der oberen und unteren Hälfte eines Krystalles diese verschiedenen Prismenflächen also stets nur zu zweien, paarweise auf, und wir können daher an jeder Hälfte drei verschiedene Paare von Flächen gleicher Gattung unterscheiden. Man nennt die a und c schneidenden das erste Paar, die zwischen a und b gelegenen das zweite Paar

und die zwischen b und c das dritte Paar, alle 3 die „zusammengehörigen Paare.“ *)

Das I. Paar (d Taf. VIII) hat seinen Werthen entsprechend das Zeichen (ma : nc : ∞b), es schneidet also die kürzere Nebenachse und die Hauptachse. Naumann nennt diese, der längeren Nebenachse parallel laufenden Prismen „Makrodoma“ und bezeichnet sie als ($m\bar{P}\infty$).

Das II. Paar (g Taf. VIII) erhält das Zeichen (ma : nb : ∞c). Seine Flächen stehen senkrecht in der Normalstellung eines Krystalles und entsprechen den Flächen der I. 4seitigen Säule, wenn m und n = 1 sind. Diese senkrecht stehenden Flächen nennt Naumann Prismen. Ist m und n = 1, so bezeichnet er die Flächen mit (∞P), ist m = 1, n > 1, so nennt er diese Prismen Makroprismen ($\infty\bar{P}n$) ist n = 1, Brachyprismen ($\infty\breve{P}n$).

Das III. Paar (f Taf. VIII) wird demnach (mb : nc : ∞a). Es werden diese der kürzeren Nebenachse parallel laufenden Flächen von Naumann „Brachydoma“ genannt und mit ($m\breve{P}\infty$) bezeichnet. Das erste und das dritte Paar wird auch öfter als „erstes und zweites horizontales Prisma“ aufgeführt, während das zweite als vertikales Prisma bezeichnet wird.

In den angegebenen allgemeinsten Zeichen kann m wie n sowohl alle möglichen Werthe zwischen o und ∞ haben. Kommen diese 3 Prismen zusammen und allein vor, und zwar alle 3 gleichmässig ausgebildet, so würde ein dem Granatoëder ähnlicher Körper ein „Granatoid“ von ihnen gebildet werden, der wie dieses von 12 Rhomben begränzt wäre, und eben so viele Kanten und Ecken hätte; die Rhomben

*) Streng genommen heissen sie nur so, wenn sie an einem Octaëder als Abstumpfung der dreierlei Kanten erscheinen würden, also je 2 Achsen in der Einheit die dritte ∞ geschnitten wird, die anderen bilden stumpfere oder spitzere Prismen.

wären aber in diesem Falle von dreierlei Art. In der Natur kommt dieses aber nicht vor, eines der Paare tritt stets zurück, verschwindet ganz aus der Begränzung des Körpers, oder tritt nur sehr untergeordnet auf. In diesem letzteren Falle hat dieses untergeordnete allein die Gestalt eines Rhomben, (d Fig. 87) die andern beiden erscheinen dadurch als Fünfecke oder Sechsecke. Dass es aber wirklich die 3 zusammengehörigen Paare in diesem Falle sind, dass bei Vergrösserung der kleinen Rhombenflächen wirklich ein Granatoid entstehen würde, erkennt man daran, dass die Combinationskanten zwischen der untergeordneten Fläche und den beiden anderen Paaren parallel den gegenüberliegenden Kanten derselben laufen, so dass dann, wenn von beiden Seiten her die Rhombenflächen sich berühren würden, aus dem Fünfeck ein Rhombus würde.

§. 72. III. Flächen, welche nur eine Achse schneiden und den beiden andern parallel laufen.

Auch hier haben wir wieder dreierlei verschiedene Paare von Flächen nach den 3 verschiedenen Achsen zu unterscheiden, die wir als gerade Endfläche, als I. und II. Seitenfläche (zu unterscheiden von Säulenfläche) bezeichnen wollen. Naumann nennt diese Paare Pinakoide. Es sind die Flächen mit dem Zeichen $(c : \infty a : \infty b)$, $(a : \infty b : \infty c)$, $(b : \infty a : \infty c)$. Nach Naumann oP, $\infty\bar{P}\infty$, $\infty\breve{P}\infty$. Je 2 derselben gehen also einem der Hauptdurchschnitte parallel, ihre ebenen Winkel sind daher dieselben, wie die des Hauptschnittes, dem sie parallel laufen. Kommen die 3 Paare zusammen vor, so werden sie daher ein rechtwinkliges Prisma von dreierlei Flächen bilden, welche sämmtlich Rechtecke sind.

§. 73. Berechnung der ein- und einachsigen Gestalten.

I. Des rhombischen Octaëders $(a : b : c)$.

1) **Neigung der Flächen gegen die Achsen:**

a) gegen c ist sin : cos $= a \, . \, b : c\sqrt{a^2 + b^2}$,

b) „ a „ „ : „ $= b \, . \, c : a\sqrt{b^2 + c^2}$,

c) „ b „ „ : „ $= a \, . \, c : b\sqrt{a^2 + c^2}$.

Es ist nehmlich immer das Verhältniss für den Sinus das Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Kante, welche 2 Dimensionen verbindet, wenn die dritte auf diesen senkrechte Dimension, gegen welche wir die Neigung suchen, den Cosinus darstellt. Die Sinuslinie ist also immer das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke, wo 2 Grunddimensionen die Katheten sind, auf die Hypotenuse, für die Neigung gegen c also sin : cos $= \frac{a \, . \, b}{\sqrt{a^2 + b^2}} : c = a\,b : c\sqrt{a^2 + b^2}$, wie oben u. s. f.

2) **Neigung der Kanten gegen die Achsen:**

a) der Kanten A (zwischen a und c)

gegen c ist sin : cos $= a : c$, gegen a $= c : a$,

b) der Kanten B (zwischen b und c)

gegen b sin : cos $= c : b$, gegen c $= b : c$,

c) der Kanten C (zwischen a und b)

gegen a sin : cos $= b : a$, gegen b $= a : b$.

Nennen wir die dreierlei Winkel von A, B, C gegen c, b, a α, β, γ, so ist (C I a — f)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin}{\cos} = \frac{a}{c} \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \text{„} = \frac{c}{b} \quad \mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{tg}\gamma = \text{„} = \frac{b}{a} \quad \mathrm{ctg}\gamma = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{a}{b}$$

und $\mathrm{tg}\alpha \, . \, \mathrm{tg}\beta \, . \, \mathrm{tg}\gamma = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 = \mathrm{ctg}\alpha \, . \, \mathrm{ctg}\beta \, . \, \mathrm{ctg}\gamma$.

Daraus findet man $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta \, . \, \mathrm{tg}\gamma} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta} = \mathrm{ctg}\alpha \, . \, \mathrm{ctg}\beta$ etc.

Man kann daher mit Hülfe dieser Formeln stets aus zwei Winkeln von 2 der durch die Kanten gebildeten Rhomben leicht den dritten finden, so wie sie uns auch dazu dienen,

3) das Verhältniss der 3 Dimensionen a:b:c zu finden.

So wie wir nehmlich 2 der Winkel haben, so ist uns damit auch das Verhältniss der 3 Dimensionen zu einander gegeben. Wir finden nehmlich

1) aus α und β

$$a:b:c = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : 1,$$

2) aus α und γ

$$a:b:c = 1 : \operatorname{tg}\gamma : \operatorname{ctg}\alpha,$$

3) aus β und γ

$$a:b:c = \operatorname{ctg}\gamma : 1 : \operatorname{tg}\beta.$$

Aus den obigen Formeln haben wir $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}$ oder $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{a}{c}$ $1 : \operatorname{tg}\alpha = c : a$, ebenso $\operatorname{ctg}\beta = \frac{b}{c}$ und daraus $1 : \operatorname{ctg}\beta = c : b$. Aus diesen beiden Proportionen erhalten wir

$$1 : \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta = c : a : b \text{ oder } a : b : c = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : 1,$$

wie oben. Auf dieselbe Weise finden wir, da

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{c}{a},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{a} \qquad 1 : \operatorname{ctg}\alpha = a : c,$$
$$1 : \operatorname{tg}\gamma = a : b, \text{ also}$$

$1 : \operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{tg}\gamma = a : c : b$, und ebenso aus den Winkeln β und γ, da $\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{a}{b}$ $\quad 1 : \operatorname{tg}\beta = b : c$

$$1 : \operatorname{ctg}\gamma = b : a,$$

also wie oben $\quad 1 : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = b : c : a.$

Auch aus den Winkeln, welche die Flächen der Rhombenoctaëder in den Kanten miteinander bilden, lassen sich die Verhältnisse der 3 Dimensionen berechnen; wir werden später nach Betrachtung der Kantenwinkel noch einmal darauf zurück kommen. Auch in diesem Systeme werden die Verhältnisse der 3 Grunddimensionen am füglichsten durch Qua-

dratwurzelgrössen ausgedrückt. In manchen hat man ein sehr merkwürdiges Abhängigkeitsverhältniss der drei Dimensionen entdeckt, so gilt z. B. für den Topas die Gleichung

$$b = a + c,$$

für den Coelestin, Baryt und Bleivitriol

$$2b = 2a + c,$$

für den Arragonit, Strontianit, Witherit und Weissbleierz

$$4b = 3a + 3c.$$

Sehr einfach ist das Verfahren, aus 2 dieser Winkel den dritten und das Verhältniss der 3 Dimensionen zu finden. Man lege nehmlich die beiden gegebenen Winkel so zusammen, dass sie einen Schenkel und den Scheitel gemeinschaftlich haben, und zwar so, wie sie in der Natur eine Dimension gemeinschaftlich haben. Den zweiten Schenkel des zweiten Winkels trage man so auf, dass alle 3 Schenkel in denselben Quadranten des aus dem Scheitel des Winkels gezogenen Kreis fallen. Jedes von dem Schenkel des grösseren Winkels auf den, beiden Winkeln gemeinschaftlichen, Schenkel gefällte Perpendikel giebt uns das Verhältniss der 3 Dimensionen, in den Stücken Ca, ab und ac Fig. LXV, d. h. in dem auf dem gemeinschaftlichen Schenkel durch das Perpendikel abgeschnittenen Stücke, dem Stücke des Perpendikels zwischen den 2 Schenkeln des kleineren Winkels und dem ganzen Perpendikel. Es sei uns z. B. der Winkel der Kante zwischen a und c, den sie mit a bildet, gegeben = α Fig. LXV und der Winkel der Kante zwischen a und b ebenfalls an a = β, so findet man das Verhältniss von a : b : c, indem man α und β in der Fig. LXV bezeichneten Weise zusammenträgt, wo dann Ca = a, ac = c und ab = b wird. Schneidet man von a aus av = cb ab und zieht bv, so ist $\measuredangle$ abv = dem Winkel der Kante zwischen b und c an b, und $\measuredangle$ avb = dem Winkel derselben Kante an c. Wäre uns der Winkel der Kante zwischen a und b an c gegeben, so wäre dies der Winkel x. Die Construction in diesem

Falle wäre dann anders. Aus der Fig. LXV ergiebt sich von selbst, welches Verfahren in diesem Falle anzuwenden wäre, wenn man nicht aus dem gegebenen Winkel x den Winkel β, der ja immer das Complement von x zu einem rechten ist, sich zunächst construiren will.

4) Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander:

a) in den Kanten A (zwischen a und c)

$$\sin : \cos = b : \frac{a \cdot c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = b\sqrt{a^2 + c^2} : a c,$$

b) in den Kanten B (zwischen b und c)

$$\sin : \cos = a : \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = a\sqrt{b^2 + c^2} : b c,$$

c) in den Kanten C (zwischen a und b)

$$\sin : \cos = c : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = c\sqrt{a^2 + b^2} : ab.$$

Es giebt uns nehmlich für den halben Winkel das Verhältniss von sin : cos die auf der Halbirungsebene des Winkels, d. h. einem unserer Hauptschnitte senkrechte Dimension zu dem Perpendikel, das aus dem Mittelpuncte auf die Kante, deren Winkel wir berechnen, gefällt wird. Die Kantenwinkel sind auch hier stets das Complement zu dem Winkel, den dieselben Flächen mit den Achsen machen, welche uns den Sinus für den Kantenwinkel giebt. Suchen wir das Verhältniss vom rad. zu den drei Winkeln für das gefundene Verhältniss von sin : cos, so finden wir, dass derselbe zu den 3 Verhältnissen stets derselbe wird, nehmlich

$$= \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}$$

indem a) $\sqrt{(b\sqrt{a^2 + c^2})^2 + (a c)^2} = \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}$ wie oben,

b) $\sqrt{(a\sqrt{b^2 + c^2})^2 + (b c)^2} = \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ wie oben,

c) $\sqrt{(c\sqrt{a^2 + b^2})^2 + (a^2 b)^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2}$ wie oben.

Mit Hülfe der Formeln für die Kantenwinkel A, B, C finden wir aber auch, wenn uns 2 derselben gegeben sind, das Verhältniss der Dimensionen a, b und c. Es ist nehmlich offenbar

a) für den Kantenwinkel A

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{b.\sqrt{a^2+c^2}}{a\,c} = \frac{b}{a}.\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b}{c}.\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

d. h. nach C I a—f

$$= tg\gamma . sec. \alpha = ctg\beta . cosec. \alpha,$$

b) für den Kantenwinkel B

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{a.\sqrt{b^2+c^2}}{b\,c} = \frac{a}{b}.\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c} = \frac{a}{c}.\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}$$

$$= ctg\gamma . cosec. \beta = tg\alpha . sec. \beta$$

c) für den Kantenwinkel C

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{c.\sqrt{a^2+b^2}}{a\,b} = \frac{c}{a}.\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{c}{b}.\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$= ctg\alpha . cosec. \gamma = tg\beta . sec. \gamma.$$

Die Winkel α, β, γ sind hier ganz dieselben, wie pag. 217 nehmlich die Neigungswinkel der Kanten gegen die Achsen. Wie man aus diesen Winkeln das Verhältniss der 3 Dimensionen findet, wurde bereits pag. 218 angegeben. Die eben entwickelten Formeln dienen nun dazu, auf dieselbe Weise auch aus den Kantenwinkeln die Winkel der Kanten gegen die Achsen und das Verhältniss der 3 Dimensionen a, b, c zu finden, indem wir durch dieselben die Winkel α, β, γ auf die angegebene Weise finden.

Ganz dasselbe Verfahren führt uns auch auf die Winkel α, β, γ, wenn uns die Neigungswinkel der Flächen gegen die Achsen gegeben sind. Es war nehmlich pag. 217 für die Neigung der Octaëderfläche

a) gegen c

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{a\,b}{c\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c}.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= tg\alpha . \sin. \gamma = tg\beta . cosin. \gamma,$$

b) gegen a

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{b\,c}{a\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$= tg\gamma . \sin. \beta = ctg\alpha . \text{cosin}. \beta,$$

c) gegen b

$$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{a\,c}{b\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$= ctg\gamma . \text{cosin}. \alpha = tg\beta . \sin. \alpha.$$

Durch derartige Zerlegungen in einzelne Factoren lassen sich noch mancherlei Abhängigkeitsverhältnisse der verschiedenen Winkel von einander nachweisen, deren Verfolgung uns jedoch hier zu weit führen würde.

5) Werthe der Kanten.

Es ist die Kante $A = \sqrt{a^2 + c^2}$
„ „ „ „ $B = \sqrt{b^2 + c^2}$
„ „ „ „ $C = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die bisher entwickelten Formeln passen für alle möglichen Rhombenoctaëder, auch für die, welchen ein anderes Zeichen zukommt, indem wir nur in allen Formeln statt a, b oder c, den veränderten Werth dieser Grössen ma oder mb oder mc, oder $\frac{1}{m}$a, $\frac{1}{m}$b, $\frac{1}{m}$c an den betreffenden Stellen einzusetzen brauchen, um unmittelbar die Werthe für die verschiedenen anderen Octaëder daraus zu finden.

Wie schon pag. 212 erwähnt wurde, kommen in dem rhombischen Systeme sonst keine einfachen Gestalten vor. Auch die Octaëder selbst sind ziemlich selten, viel häufiger, ja die allergewöhnlichste Erscheinung sind Flächen, welche nur 2 Grunddimensionen schneiden und der dritten parallel laufen, und zwar meistens zweierlei Prismen mit einander verbunden, nehmlich ein vertikales Prisma mit einem oder mehreren horizontalen. Wir wollen deshalb etwas näher auf die Betrachtung dieser Flächen eingehen.

§. 74. 1) Das erste vertikale Prisma (a : b : ∞c) (g Taf. VIII), unser II. Paar pag. 215. Es erscheint an dem Rhomben-Octaëder als Abstumpfung seiner Lateralkanten. Wenn es für sich mit der geraden Endfläche vorkommt, so erscheinen seine Flächen als Rechtecke; die Winkel seiner vertikalen Kanten sind gleich den Winkeln, welche die Kanten des Octaëders miteinander an den Achsen a und b bilden. Es lassen sich in diesem Falle aus ihm nur die Dimensionen a : b berechnen, weil keine Fläche vorhanden ist, welche eine dieser beiden Dimensionen und c zugleich schneidet. An dem Schwerspathe kommt diese Fig. 95 dargestellte Form ohne andere Flächen vor.

Meistens gesellen sich aber auch noch Flächen eines der andern beiden Paare hinzu. Die Flächen des I. oder III. Paares bilden dann an dem vertikalen Prisma Zuschärfungsflächen, welche auf die Kanten desselben aufgesetzt sind, wie Fig. 86 und 87 d und f. Stehen die Flächen eines horizontalen Prismas mit denen des vertikalen im Gleichgewicht, so dass sich die ersteren von oben und unten berühren, so entsteht dadurch eine von 8 gleichschenkligen Dreiecken begränzte Gestalt, die von zweierlei Art sind. Man hat diesen Körper Oblongoctaëder genannt (Fig. 89). Es hat zweierlei Flächen, dreierlei Kanten und zweierlei Ecken. Vier unregelmässige 2, 1 und 1kantige und 2 symmetrische 4kantige, 2 und 2flächige. Je geringer der Unterschied in den dreierlei Achsen ist, desto ähnlicher wird der Körper einem regulären Octaëder; die Kanten, welche parallel der Dimension c und die, welche von je 2 Zuschärfungsflächen gebildet werden, (x und u Fig. 89) bilden stets ein Rechteck miteinander, das meistens in die Länge gestreckt ist, und dem Körper den Namen Oblongoctaëder verschafft hat. Die Hauptachse des Grundoctaëders verbindet die Mittelpuncte der Kanten der Zuschärfungsflächen, die eine Nebenachse die Mittelpuncte der Kanten des vertikalen Prismas,

die andere die vierkantigen symmetrischen Ecken des Oblong-Octaëders.

Was nun die verschiedenen Winkel dieses Körpers betrifft, so ist, wenn wir den Körper als aus dem I. und II. Paar zusammengesetzt denken

1) die Neigung der Zuschärfungsfläche (a:c:∞b) gegen einander gleich der Neigung der Kanten A an c gegen einander, wofür wir hatten sin : cos = a : c (pag. 217),
2) die Neigung der Flächen des vertikalen Prismas (a : b : ∞c) gleich der Neigung der Kanten C gegen einander an b, nehmlich sin : cos = a : b,
3) die Neigung der 2erlei Flächen gegen a und b die Complemente zu den Winkeln in den Kanten,
4) die Neigung der beiden Flächen gegen einander.

Wir berechnen diesen Winkel am besten, indem wir das Verhältniss von sin : cos für seinen Complementwinkel zu 2 R suchen. Es sei Fig. LXVI tma unsere Fläche (a : c : ∞b), apm unsere Prismenfläche (a : b : ∞c), so ist unser gesuchter Kantenwinkel ∡ csr, statt dessen wir leichter das Verhältniss seines Complementwinkels csl berechnen. Es sei in Fig. LXVI Ca = a, Cb = b, Cc = c, cl senkrecht auf ca, xv parallel cl, cx = Ca = a, xa parallel Cc = c, laCc eine durch die Dimension a und c gelegte Ebene, die also auch durch die Diagonale der Oblongoctaëderfläche durch ac geht. Das Verhältniss von sin : cos für unsern Complementwinkel csl geben uns nun die Linien lc : cs. Nun ist offenbar xv, der Voraussetzung nach senkrecht auf ca, das Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreiecke cxa, aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse. Die Katheten sind hier cx = a und xa = c, also $xv = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Da cl

parallel xv, so ist (B 7) $lc : xv = ca : va$. Für va finden wir nach B 9 aus der Proportion

$$cx : xv = xa : av, \text{ d. h. } a : \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = c : av$$

$$av = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Setzen wir nun diesen Werth von av in die obige Proportion, so erhalten wir aus $lc : xv = ca : av$

$$lc : \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \sqrt{a^2 + c^2} : \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$lc = \frac{ac \,.\, \sqrt{a^2 + c^2}}{\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}}} = a \,.\, \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c},$$

cs aber ist (Fig. LXVII und LXVI) das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke, wo $cm = b$ und $ac = \sqrt{a^2 + c^2}$ die Katheten sind aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse,

$$\text{also } cs = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\text{Es ist also } \sin : \cos = lc : cs = \frac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{c} : \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$= a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : bc.$$

Das Verhältniss für den rad., d. h. die Linie ls hiezu finden wir aus $\sin : \cos = \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, \sqrt{a^2 + c^2}$,

da $\text{rad.}^2 = \sin^2 + \cos^2 = a^2 (a^2 + b^2 + c^2) + b^2 c^2$

$\text{rad.} = \sqrt{a^2 (a^2 + b^2 + c^2) + b^2 c^2}$ sich zerlegen lässt in die beiden Factoren $\sqrt{(a^2 + b^2)} \,.\, \sqrt{(a^2 + c^2)}$.

Ganz auf dieselbe Weise finden wir aber auch das Verhältniss der Neigungswinkel in den Kanten, welche die übrigen Paare miteinander bilden, indem stets je 2 zusammen ein 4seitiges Prisma mit Zuschärfungsflächen darstellen. Wir

brauchen daher in der obigen Formel nur die Buchstaben demgemäss zu ändern. Sind z. B. das vertikale Prisma (a : b : ∞ c) und das III. zugehörige Paar (b : c : ∞ a) miteinander verbunden, so erhalten wir für die Neigung dieser 2 Flächen gegen einander das Verhältniss

$$\sin : \cos = b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : ac.$$

Wir müssen in diesem Falle nur die Buchstaben a und b miteinander vertauschen. Die Fläche (a : b : ∞ c) bleibt nehmlich dieselbe. Nehmen wir nun an die Zuschärfungsfläche, die auf Ca aufgesetzt ist (Fig. LXVI), sei auf b aufgesetzt, so erhält aC den Werth b und Cb den Werth a, also b und a haben ihre Stelle vertauscht.

Wollen wir nun die Neigung der beiden horizontalen Prismen, d. h. (a : c : ∞ b) und (b : c : ∞ a) gegen einander aus obiger Formel entwickeln, so erhalten wir dafür $\sin : \cos = c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : ab$, wie wir auch die Buchstaben vertauschen mögen, d. h. es bleibt sich gleich, ob wir in Fig. LXVI bC als b lassen, also die Fläche mpa als (b : c : ∞ a) ansehen, oder ob wir bC = a setzen und die Fläche dann als (a : c : ∞ b) ansehen.

Der radius ändert sich bei allen 3 Verhältnissen natürlich, da wir stets andere Factoren ausser der constant bleibenden Grösse unter dem Wurzelzeichen haben. Nennen wir hier die Wurzelgrösse $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ M, so haben wir also, wenn wir die Neigung des I. und II. Paares gegen einander, d. h. für die Flächen (a : c : ∞ b) und (a : b : ∞ c) mit *A*, die des II. und III. Paares (a : b : ∞ c) gegen (b : c : ∞ a) gegen einander mit *B*, und die des I. und III. Paares (a : c : ∞ b) gegen (b : c : ∞ a) mit *Γ*, (d. h. die Complementwinkel der Neigung) bezeichnen, für

$$A \quad \sin : \cos : \text{rad.} = a\,M : bc : \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, \sqrt{a^2 + c^2}$$
$$B \quad „ : „ : „ = b\,M : ac : \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\Gamma \quad „ : „ : „ = c\,M : ab : \sqrt{a^2 + c^2} \,.\, \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Zerlegen wir die Werthe des Cosinus wieder in ähnlicher Weise wie pag. 221 in seine einzelnen Factoren, so erhalten wir ebenfalls wieder denselben ausgedrückt in trigonometrischen Linien unserer 3 Rhombenwinkel α, β und γ (pag. 217).

Es ist nehmlich

$$\cos. A = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \sin.\gamma . \cos.\alpha$$

$$\cos. B = \frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2} . \sqrt{b^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = \cos.\gamma . \sin.\beta$$

$$\cos. \Gamma = \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} = \sin.\alpha . \cos.\beta.$$

Wie verhalten sich bei gleichem Cosinus die Sinuse für A, B, Γ zu einander?

Wir hatten für A sin : cos $=$ a M : bc
„ B „ : „ $=$ b M : ac
„ Γ „ : „ $=$ c M : ab.

Multipliciren wir sin. und cosin. von A mit a, von B mit b, von Γ mit c, so erhalten wir

für A sin : cos $=$ a^2 M : abc
„ B „ : „ $=$ b^2 M : abc
„ Γ „ : „ $=$ c^2 M : abc.

Es verhalten sich also bei gleichem Cosinus die Sinuse $\sin A : \sin B : \sin \Gamma = a^2 : b^2 : c^2$.

Da aber $\text{tg} A : \text{tg} B : \text{tg} \Gamma = \frac{\sin A}{\cos A} : \frac{\sin B}{\cos B} : \frac{\sin \Gamma}{\cos \Gamma}$

$= \frac{a^2 M}{abc} : \frac{b^2 M}{abc} : \frac{c^2 M}{abc}$, so ist auch

$\text{tg} A : \text{tg} B : \text{tg} \Gamma = a^2 : b^2 : c^2$ und daraus finden wir das Verhältniss der 3 Dimensionen

$$a : b : c = \sqrt{\text{tg} A} : \sqrt{\text{tg} B} : \sqrt{\text{tg} \Gamma}.$$

Ebenso wie wir die Formeln für die Rhombenoctaëder (pag. 222) auf alle Flächen ausdehnen und unmittelbar anwenden können, welche alle 3 Dimensionen schneiden, ebenso

können wir die bisher für die Flächen, welche nur zwei Achsen schneiden, entwickelten Formeln für alle derartige Flächen gebrauchen, auch wenn sie nicht 1 a oder 1 b oder 1 c schneiden, wenn wir nur dabei diese Aenderung berücksichtigen und für diejenige Dimension, welche nicht in der Einheit geschnitten wird, ihren veränderten Werth in den Formeln an ihre Stelle setzen.

§. 75. Neigung der Octaëderflächen ($\frac{1}{n}$a : $\frac{1}{m}$b : c) oder (ma : nb : c) gegen die Säulenflächen (a : b : ∞ c).

Wir finden auch diesen Neigungswinkel am leichtesten, wenn wir sein Complement, d. h. also den Winkel, den die Octaëderfläche mit derjenigen Säulenfläche bilden würde, welche derjenigen, auf welche sie aufgesetzt ist und mit welcher sie einen stumpfen Winkel bildet, parallel ist, oder, was dasselbe ist mit einer durch die Dimension c parallel diesen beiden Flächen gelegten Ebene.

Es sei nun Fig. LXXI bab′ die Projection zweier Flächen des Grundoctaëders (a : b : c), auf dessen Seitenflächen, die Abstumpfung der Lateralkanten ab, unsere Fläche ($\frac{1}{n}$a : $\frac{1}{m}$b : c) schräg aufgesetzt erscheint. Die Projection dieser Fläche, ebenfalls durch 1 c gelegt, sei auf der durch a und b gelegten Ebene die Linie me. Der Winkel, den die Fläche me mit der Säulenfläche (a : b : ∞ a) macht, wird von dem, welchen dieselbe Fläche mit einer durch die Dimension c gelegten parallel der Fläche (a : b : ∞ c) gehenden Ebene bildet, zu 2 R ergänzt. Es sei Fig. LXXI die Linie ge die Projection dieser Ebene, so bildet die Fläche me mit der Fläche ge diesen Winkel längs der Kante, ce Fig. LXXII, welche, da beide Flächen durch 1 c gelegt sind, von diesem Puncte e nach 1 c geht. Wählen wir nun für diesen Winkel als Cosinus ein Perpendikel Cl (Fig. LXXII) aus C auf die Kante, welche von 1 c nach e geht, so giebt uns das in C auf Ce errichtete Perpendikel Cd das Verhältniss des Sinus des Winkels der Fläche cme gegen die Ebene Cce zu jenem Cosinus.

Wir haben nun die Linien Cl und Cd zu berechnen. Es ist $Cl = \frac{cC \cdot Ce}{\sqrt{(ce)^2}}$, als Perpendikel in dem rechtwinkligen Dreiecke Cce aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse. Unserer Voraussetzung nach ist $Cm = \frac{1}{m} b$, $Cn = \frac{1}{n} a$, Cc ist $= c$, wir haben daher noch Ce und ce (Fig. LXXI und LXXII) zu berechnen. In Fig. LXXI ist der Voraussetzung nach mf parallel ba parallel ge, $Cm = \frac{1}{m} b$, $Cn = \frac{1}{n} a$; daher (B 2 und 4) $\triangle$ Cne $\sim$ fnm, also (B 6) Cn : nf = Ce : fm

$$Ce = \frac{Cn \cdot fm}{nf} = \frac{\frac{1}{n} a \cdot \sqrt{(\frac{1}{m} b)^2 + (\frac{1}{m} a)^2}}{\frac{1}{m} a - \frac{1}{n} a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{n - m}$$

$$ce = \sqrt{(Cc)^2 + (Ce)^2} = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 + b^2}{n - m}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 (n - m)^2}}{n - m},$$

also ist Cl, wenn wir für Ce und ce die Werthe einsetzen

$$Cl = \frac{\frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{n - m}}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 (n - m)^2}}{n - m}} = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 (n - m)^2}}$$

Cd finden wir $= \frac{ab \sqrt{a^2 + b^2}}{ma^2 + nb^2}$.

Verlängern wir nehmlich Cd nach Cs, so ist offenbar in den ähnlichen Dreiecken Cde und sdm

Cd : ds = Ce : ms,

für Ce hatten wir gefunden $Ce = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{n - m}$,

für ms finden wir (nach B 9) aus der Proportion

ms : mC = mC : mf

$$ms = \frac{(mC)^2}{mf} = \frac{(\frac{1}{m} b)^2}{\sqrt{(\frac{1}{m} a)^2 + (\frac{1}{m} b)^2}} = \frac{b^2}{m \sqrt{a^2 + b^2}},$$

also ist $Cd : ds = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n-m} : \frac{b^2}{m\sqrt{a^2+b^2}} = m(a^2+b^2):(n-m)b^2$

$$Cd = \frac{m(a^2+b^2)}{m(a^2+b^2)+(n-m)b^2} \cdot Cs = \frac{m(a^2+b^2)}{ma^2+nb^2} \cdot Cs,$$

Cs ist das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke auf die Hypotenusa aus dem rechten Winkel, dessen Katheten $\frac{1}{m}a$ und $\frac{1}{m}b$ sind, also

$$Cs = \frac{\frac{1}{m}a \cdot \frac{1}{m}b}{\sqrt{(\frac{1}{m}a)^2+(\frac{1}{m}b)^2}} = \frac{ab}{m\sqrt{a^2+b^2}},$$

daraus wird $Cd = \frac{m(a^2+b^2)}{ma^2+nb^2} \cdot \frac{ab}{m\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{ma^2+nb^2}$

wie oben.

Es ist also für unseren gesuchten Winkel

$$\sin : \cos = Cd : Cl = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{ma^2+nb^2} : \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2(n-m)^2}}$$

$$= ab\sqrt{a^2+b^2+c^2(n-m)^2} : c \cdot (ma^2+nb^2).$$

§. 76. Neigung der Octaëderflächen gegen die Seitenflächen $(a : \infty b : \infty c)$ und $(\infty a : b : \infty c)$.

Auch in diesen beiden Fällen betrachten wir am besten das Complement dieses Winkels, also die Neigung gegen eine Ebene, die durch c parallel der Seitenfläche gelegt wird, im ersten Falle also gegen die durch c und b gelegte Ebene, im andern gegen die durch a und c gehende.

1) Der Fläche $(\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : c)$ gegen $(a : \infty b : \infty c)$.

Hier giebt uns das Verhältniss von sin : cos die Linie Ct (Fig. LXXII) und Cn, d. h. wenn wir uns wieder die beiden Flächen durch 1 c gelegt denken, und ein Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Kante, d. h. die Durchschnittslinie beider Flächen, cm, fällen, so giebt uns dieses das Verhältniss des Cosinus gegen die auf ihm und auf der durch c und b gelegten Fläche senkrecht stehende Linie Cn als Sinus.

Wir haben also

$$\sin : \cos = Cn : Ct = \tfrac{1}{n}a : \frac{Cc \,.\, Cm}{\sqrt{(Cc)^2+(Cm)^2}} = \tfrac{1}{n}a : \frac{\frac{\frac{1}{m}b \,.\, c}{\sqrt{b^2+m^2c^2}}}{m}$$

$$= a \,.\, \sqrt{b^2+m^2c^2} : nbc.$$

2) **Derselben Fläche gegen** $(\infty a : b : \infty c)$.

In diesem Falle giebt $\frac{1}{m}b$ das Verhältniss des Sinus gegen das Perpendikel Cx als Cosinus, welches aus C auf die gemeinschaftliche Kante der beiden Flächen gefällt wird, wovon die $(\infty a : b : \infty c)$ parallele durch c und die Dimension a geht, die Kante also von C nach dem Puncte, wo unsere Fläche $(\frac{1}{n}a : \frac{1}{m}b : c)$ die Dimension a schneidet. Es ist also hier

$$\sin : \cos = Cm : Cx \text{ (Fig. LXXII)} = \tfrac{1}{m}b : \frac{Cc \,.\, Cn}{\sqrt{(Cc)^2+(Cn)^2}}$$

$$= b\sqrt{a^2+n^2c^2} : mac.$$

Noch einfacher werden natürlich die Formeln und die Berechnung, wenn m oder n = 1 wird. Bei der Berechnung der Werthe der Dimensionen a und b aus einem gemessenen Winkel irgend einer Octaëderfläche gegen die Seiten- oder Säulenflächen darf man jedoch nicht vergessen, dass die eben entwickelten Formeln nicht für den stumpfen Winkel, den die beiden Flächen mit einander bilden, sondern für dessen Complement zu 2 R berechnet sind, der Cosinus also negativ wird, während er bei dem Complementwinkel positiv ist.

Von den Combinationen des ein- und einachsigen Systemes.

§. 77. Die Art und Weise, wie die verschiedenartigen Flächen miteinander in Combination erscheinen können, ist, weil es nur eine Art einfacher Körper giebt, ziemlich einfach, und lassen sich schnell übersehen. Da aber in den dreierlei Richtungen vollkommene Selbständigkeit in Beziehung

auf die Ausbildung von Flächen herrscht, an jeder andersgestaltete und anderswerthige vorkommen können, als an den beiden andern, so ist dadurch eine unendliche Mannigfaltigkeit der Combinationserscheinungen in der Wirklichkeit bedingt. Jede Mineralspecies zeigt darin ihre Eigenthümlichkeiten, jede schlägt gleichsam einen anderen Weg zur Ausbildung von Flächen ein, und so kommt es, dass Flächen gewisser Zonen bei einem Mineral ausserordentlich häufig sind, so dass die Flächen derselben fast allein vorhanden sind, und die anderer Zonen nur wenig zur Entwicklung kommen lassen, während dieselben Flächen bei einem anderen gar nie angetroffen werden, vollkommen aus der Begränzung des Körpers verbannt sind, oder wenn Flächen mit demselben Werthe vorkommen, an andern Dimensionen in dieser Weise erscheinen. Gesetze lassen sich in dieser Beziehung daher nur für einzelne Mineralspecies aufstellen und auch hier nur mit Wahrscheinlichkeit, nehmlich nur nach den bisher beobachteten Erscheinungen, die uns natürlich keine unzweifelhaft sichere Gewähr leisten können, dass nicht später vielleicht an anderen Individuen derselben Species Beobachtungen gemacht werden, die das bisher gültige Gesetz umstossen.

Betrachten wir nun die Art und Weise und die Bedingungen, welche bei den Combinationen der verschiedenen Flächen an dem Grundoctaëder Statt finden, so sind dieselben folgende.

Es erscheinen am Grundoctaëder

1) Rhombenoctaëderflächen:

a) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. d. Eck. an c stumpfere, und zwar von der Form (c : ma : mb), wenn die Combinationskanten parallel den Lateralkanten sind, oder (c : ma : nb) und (c : na : mb), wenn die Combinationskanten ein > Stück von der Kante zwischen c und b, oder von der zwischen c und a abschneiden; die Gränzglieder sind also die Zuschärfungsflächen

der zwei an c zusammenstossenden Kanten, nehmlich $(a : c : mb)$ und $(b : c : ma)$,

b) als Zusch. der Kanten A von der Form $(a : c : mb)$,

c) als Zusch. der Kanten B von der Form $(b : c : ma)$,

d) als Zusch. der Kanten C von der Form $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}b : c)$,

e) als 4fl. a. d. Fl. aufg. Zusp. der Ecken an a und b spitzere, und zwar ebenfalls von dreierlei Form, wie die an c erscheinenden unter a) angeführten, wo man nur statt c, a oder b zu setzen braucht, um die verschiedenen möglichen Formen zu erhalten.

2) Prismenflächen:

a) als gerade Abstumpfung der dreierlei Kanten unsere drei Paare $(a : c : \infty b)$, $(b : c : \infty a)$ und $(a : b : \infty c)$

b) als Zusch. der Ecken an c auf die Kante A aufges. Prismen von der Form . . . . $(c : ma : \infty b)$

c) als Zusch. an a auf die Kt. A aufges. $(c : \frac{1}{m}a : \infty b)$

d) „ „ „ c „ „ „ B „ $(c : mb : \infty a)$

e) „ „ „ b „ „ „ „ „ $(c : \frac{1}{m}b : \infty a)$

f) „ „ „ a „ „ „ C „ $(a : mb : \infty c)$

g) „ „ „ b „ „ „ „ „ $(a : \frac{1}{m}b : \infty c)$.

In allen diesen Fällen kann m alle Werthe zwischen o und ∞ haben.

§. 78. *Hemiedrische Gestalten des ein- und einachsigen Systemes.*

Auch in diesem Systeme sind hemiedrische Gestalten, wiewohl ausserordentlich selten, beobachtet worden. Sie erscheinen stets tetraëdrisch und untergeordnet an homoedrischen Gestalten und geben sich leicht als solche zu erkennen, indem an der Hälfte der Stellen, an welchen bei homoedrischer Ausbildung die beobachteten Flächen vorkommen sollten, dieselben erscheinen und dadurch eine den hemiedrischen Character sogleich verrathende Unsymmetrie bedingen, wie dies (Taf. IX, Fig. 100) an einem Bittersalzkrystalle zu er-

kennen ist. Wegen der geringen Bedeutung der hemiedrischen Gestalten und wegen des so seltenen und stets untergeordneten Vorkommens derselben gehen wir nicht weiter auf dasselbe ein.

§. 79. *Zonenverhältnisse des ein- und einachsigen Systemes.*

1) Kantenzone der Kante A, Zonenachse (a ; c).

Es gehören in dieselben alle Flächen, in deren Zeichen das Verhältniss von a : c sich findet, also

1) das Grundoctaëder . . . . . (a : b : c)
2) Octaëder von der Form . . (a : c : mb)
3) „ „ „ „ . . . $(a : c : \frac{1}{m}b) = (ma : mc : b)$
4) die Flächen unseres I. Paares (a : c : ∞ b)
5) die Säulenfläche . . . . . . (b : ∞ a : ∞ c).

2) Kantenzone der Kante B, Zonenachse (b ; c).

In dieselbe gehören alle Flächen, die b und c in dem Verhältnisse von b : c schneiden, also

1) das Grundoctaëder . . . . . (a : b : c)
2) Octaëder von der Form . . . (ma : b : c)
3) „ „ „ „ $(\frac{1}{m}a : b : c) = (a : mb : mc)$
4) die Flächen unseres III. Paares (∞ a : b : c)
5) die Säulenfläche . . . . (a : ∞ b : ∞ c).

3) Kantenzone der Kante C oder Zone des vertikalen Prismas der Grundform, Zonenachse (a ; b).

Es gehören in dieselbe

1) die Grundform . . . . (a : b : c)
2) die Octaëder von der Form . . $(a : b : mc) = (\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}b : c)$
3) „ „ „ „ „ $(a : b : \frac{1}{m}c) = (ma : mb : c)$
4) die Fläche des II. Paares . . . (a : b : ∞ c)
5) die gerade Endfläche . . . . . (∞ a : ∞ b : c).

4) Horizontale Zone, Zonenachse (∞ c).

Es gehören in dieselbe

1) die Flächen unseres II. Paares (a : b : ∞ c)

2) vertikale Prismen von der Form (ma : b : ∞c)
3) „ „ „ „ „ (a : mb : ∞c)
4) die Seitenflächen . . . . (a : ∞b : ∞c)
5) „ „ . . . . (b : ∞a : ∞c).

5) **Erste vertikale Zone**, Zonenachse (∞b).

In ihr liegen:

1) die erste Seitenfläche . . . . . . (a : ∞b : ∞c)
2) unser I. Paar . . . . (a : c : ∞b)
3) horizontale Prismen von der Form ($\frac{1}{m}$a : c : ∞b)
4) „ „ „ „ „ (ma : c : ∞b)
5) die gerade Endfläche . . . . (c : ∞a : ∞b).

6) **Zweite vertikale Zone**, Zonenachse (∞a).

In ihr liegen:

1) die zweite Seitenfläche . . . . . . (∞a : b : ∞c)
2) unser III. Paar . . . . (∞a : b : c)
3) horizontale Prismen von der Form (∞a : $\frac{1}{m}$b : c)
4) „ „ „ „ „ (∞a : mb : c)
5) die gerade Endfläche . . . . (∞a : ∞b : c).

§. 80. *Von der Berechnung der Gestalten des ein- und einachsigen Systemes.*

Es liegt uns stets zunächst die Aufgabe vor, das Verhältniss der 3 Dimensionen a : b : c zu finden. Da es bei diesem Systeme keine Achse giebt, die sich vor den andern auszeichnet, so ist es auch ganz willkührlich, welche man als die Achse c wählt; hat man eine dazu bestimmt, so nimmt man gewöhnlich die kürzere der beiden andern als a, die längere als b an. Die Art und Weise jedoch, wie uns die Krystalle in der Natur erscheinen, giebt uns oft einen Fingerzeig, wie wir einen Krystall wohl am einfachsten zur Betrachtung zu stellen, d. h. also, welche der Dimensionen wir als c zu wählen haben. Finden wir die Krystalle z. B. aufgewachsen auf andern Gesteinen, so werden wir wohl am

schicklichsten die Dimension, mit welcher die Krystalle aufgewachsen sind, als Hauptachse wählen, ebenso werden wir bei sehr dünnen, tafelartigen Krystallen die Tafelflächen, als die geraden Endflächen senkrecht auf der Dimension c, betrachten und darnach die verschiedenen Dimensionen mit a, b, c bezeichnen. Wie schon erwähnt wurde, sind in diesem Systeme Prismenflächen ausserordentlich vorherrschend; dadurch erhalten die Krystalle ein mehr oder weniger säulenförmiges Ansehen und es liegt daher nahe, die Säule in senkrechte Stellung zu bringen und daher die Prismenflächen, als parallel c laufend, anzunehmen. Wie man aus je 2 der verschiedenen Winkeln, welche die Flächen untereinander, die Flächen gegen die Achsen etc. bilden, das Verhältniss der 3 Dimensionen finden kann, wurde bereits oben pag. 218 etc. ausgeführt. Als Grundoctaëder können ebenfalls wieder verschiedene Octaëder, die an einer Combination auftreten, gewählt werden; man wählt dann dasjenige, welches uns das einfachste Verhältniss sowohl für die 3 Dimensionen als auch für die Ableitungszahlen der verschiedenen anderen Combinationsflächen bietet. Es kann daher vorkommen, dass man an einer Combination mit verschiedenen Octaëderflächen gar keine der vorhandenen als Grundoctaëder wählt, sondern das Grundoctaëder aus Flächen zusammengesetzt denkt, die an dem Krystallindividuum, das wir vor uns haben, gar nicht erscheinen, und alle vorhandenen Flächen als abgeleitet aus diesem darstellt.

Was nun die Berechnung der verschiedenen Octaëderflächen und Prismenflächen betrifft, so findet hier ganz dasselbe Verfahren Statt, wie bei dem 2 und 1achsigen Systeme, nur werden wir hier, da alle 3 Achsen verschieden sind, öfter unmittelbar von der pag. 149 angegebenen Formel Gebrauch machen müssen, wenn wir nicht aus den bekannten Zonenverhältnissen die Werthe einer unbekannten Fläche ohne Winkelmessung ableiten können.

§. 81. Wir hatten schon einigemale für bestimmte Flächen untersucht, welcher Werth ihnen zukomme, wenn wir von ihnen wussten, dass sie in 2 bekannte Zonen gehören. Ebenso oft kann es aber vorkommen und namentlich in den beiden folgenden Krystallsystemen hat man oft bei der Bestimmung der Werthe der Flächen darnach zu fragen, ob eine bestimmte Fläche einer bestimmten Zone angehöre, oder welches die Zonenachse sei, die 2 Flächen miteinander, wenn sie sich schneiden, bilden. Eine allgemeine Betrachtung dieser verschiedenen Fälle ist daher von grossem Interesse und gewährt auch in praktischer Hinsicht viele Vortheile. Die 3 verschiedenen Fälle, die hier möglich sind, mit ihren Unterabtheilungen hat Weiss in einer seiner unübertrefflichen Abhandlungen über den Feldspath *) entwickelt und wir geben hier die Art und Weise seines Verfahrens und die Resultate, zu denen er gelangt ist, wie sie am angeführten Orte zu finden sind.

I. Es seien uns 2 Flächen gegeben, der Ausdruck der Kante, in welcher sie sich schneiden, wird gesucht. Diese Kante stellt die Zonenachse vor, welche beiden Flächen gemeinschaftlich ist. Sind uns die Werthe der Flächen bekannt, so geben wir ihnen gleiche Werthe in einer der 3 Grunddimensionen und wählen hiezu bei den ungleichachsigen Krystallen die Dimension c, d. h. wir bringen sie — wenn sie es nicht schon sind — in die Form $(\alpha a : \beta b : nc)$ und $(\alpha' a : \beta' b : nc)$, so dass a und b jeden beliebigen Werth für die erste, α' und β' für die zweite Fläche haben; n nimmt man am besten, wie wir bisher immer, = 1. Der eine Endpunct der gesuchten Kante ist stets nc, der andere derjenige Punct in der durch a und b gelegten Ebene, in welchem sich die beiden durch nc ge-

*) Ueber mehrere neu beobachtete Krystallflächen des Feldspaths und die Theorie seines Krystallsystems im Allgemeinen. Abhandlung der k. Ac. der Wiss. zu Berlin. 1820 und 21.

legten Flächen schneiden. Seine Entfernung von der Dimension a und b sei β'' und α'', so wird die Combinationskante — unsere gesuchte Zonenachse — bezeichnet durch (nc; α''a + β''b), wobei wir den Werth von α''a jederzeit in der Richtung mit αa und den β''b in gleicher Richtung mit βb ausdrücken, und es ist, wenn wir die Dimensionen a und b in ihren verschiedenen Hälften durch Accente unterscheiden, das eine vordere a mit a, das hintere mit a', das rechte b mit b, das linke mit b' bezeichnen;

1) wenn αa und α'a, βb und β'b, beide in der gleichen Richtung liegen

$$\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} \qquad \beta'' = \frac{\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

2) wenn α' in gleicher Richtung mit α und β' in der entgegengesetzten von β liegt

$$\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'(\beta + \beta')}{\alpha\beta + \alpha'\beta} \qquad \beta'' = \frac{\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha\beta' + \alpha'\beta}$$

3) wenn α' in der entgegengesetzten Richtung von α und β' in gleicher mit β liegt

$$\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} \qquad \beta'' = \frac{\beta\beta'(\alpha + \alpha')}{\alpha\beta' + \alpha'\beta}$$

4) wenn α' und β' in den entgegengesetzten Richtungen von α und β liegen

$$\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'(\beta + \beta')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} \qquad \beta'' = \frac{\beta\beta'(\alpha + \alpha')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Beweis: Fig. LXVIII sei C der Mittelpunct unserer Construction af und be, die beiden Dimensionen a und b, und nc senkrecht auf C, so laufen im ersten Falle die zwei Flächen, beide durch nc gelegt gedacht, von e nach g und von f nach d, und zwar von e nach g die Fläche (αa : βb : nc) von a nach d die Fläche (α'a : β'b : nc). Die Kante, die sie beide, wenn sie sich schneiden, bilden, läuft von nc nach o. Ziehen wir von o eine Linie senkrecht auf Ce, also parallel der Dimension a, und auf Ca senkrecht auf der Dimension a,

also parallel der Dimension b, so ist $Cg = \alpha a$, $Ce = \beta b$, $Cf = \alpha' a$, $Cd = \beta' b$, $on = Cm = \alpha'' a$, $om = Cn = \beta'' b$. Man hat dann

$$om : Ce = gm : gC = gC - mC : gC, \text{ d. h.}$$
$$\beta'' b : \beta b = (\alpha - \alpha'')\, a : \alpha a$$
$$\beta'' : \beta = \alpha - \alpha'' : \alpha, \text{ daraus erhält man}$$
$$\beta'' = \frac{\beta(\alpha - \alpha'')}{\alpha},$$

ferner ist

$$om : Cd = mf : Cf = Cf - Cm : Cf, \text{ d. i.}$$
$$\beta'' b : \beta' b = (\alpha' - \alpha'')\, a : \alpha' a$$
$$\beta'' : \beta' = \alpha' - \alpha'' : \alpha'$$
$$\beta'' = \frac{\beta'(\alpha' - \alpha'')}{\alpha'}.$$

Setzt man nun die beiden Werthe für β'' einander gleich, so erhält man aus

$$\frac{\beta(\alpha - \alpha'')}{\alpha} = \frac{\beta'(\alpha' - \alpha'')}{\alpha'}$$
$$\alpha'\beta(\alpha - \alpha'') = \alpha\beta'(\alpha' - \alpha'')$$
$$\alpha\alpha'\beta - \alpha'\alpha''\beta = \alpha'\alpha\beta' - \alpha''\alpha\beta'$$
$$\alpha\alpha'(\beta - \beta') = \alpha''(\alpha'\beta - \alpha\beta')$$
$$\frac{\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} = \alpha'' \text{ wie oben,}$$

wiederum ist

$$on : Cg = ne : Ce = Ce - Cn : Ce, \text{ d. i.}$$
$$\alpha''\alpha : \alpha a = (\beta - \beta'')\, b : \beta b$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha(\beta - \beta'')}{\beta},$$

desgleichen

$$on : Cf = nd : Cd = Cd - Cn : Cd, \text{ d. i.}$$
$$\alpha'' a : \alpha' a = (\beta' - \beta'')\, b : \beta' b, \text{ also}$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha'(\beta' - \beta'')}{\beta'} \text{ und aus}$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha(\beta - \beta'')}{\beta} = \frac{\alpha'(\beta' - \beta'')}{\beta'} \text{ wird wieder}$$
$$\alpha\beta\beta' - \alpha\beta'\beta'' = \alpha'\beta\beta' - \alpha'\beta\beta''$$
$$\beta\beta'(\alpha - \alpha') = \beta''(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$
$$\frac{\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \beta'' \text{ wie oben.}$$

Im zweiten Falle laufen die Linien, wie h i, im vierten, wie k l, der dritte ist derselbe, wie der zweite, wenn wir nur die Bezeichnung für a und b vertauschen.

Der Gang des Beweises ist in diesen übrigen 3 Fällen derselbe, die Proportionen, aus welchen man die verschiedenen Werthe für α'' und $\beta\beta''$ findet, ergeben sich leicht aus Fig. LXVIII. Zieht man nehmlich p f parallel d h, so wird (B 6) $\triangle$ C r h $\sim$ f r p, woraus man p f findet und $\triangle$ p f i $\sim$ h d i, und f i : f d = p f : d h = i x : d C; d v = d C — v C = d C — i x, daraus findet man d v : d C = v i : C f; also hat man beide Linien, welche die Lage des Punctes i bestimmen, nehmlich i x und v i, in Werthen von a und b ausgedrückt, da i x = v C und i v = x C.

Für den vierten Fall ist, wenn man l t parallel e b, l u und q d parallel C a' zieht, k C : C z = k d : d y; l d : l f = d y : z f und l d : d f = u l : f C = u d : d C = l q : d C. Daraus findet man nun ebenfalls wieder den Punct l bestimmt durch die Linien u l = C t und u C = l t.

Dieselben Formeln kann man natürlich auch gebrauchen, wenn in einer andern Dimension als in c der gleiche Werth der 2 Flächen gegeben ist, und man dieselbe nicht umwandeln will. Man darf sich dann nur die Flächen so geschrieben denken (n a : β b : α c) und (n a : β' b : α' c), um die gesuchte Kante, welche dann den Werth (n a ; β'' b + α'' c) erhält, aus denselben Formeln zu finden.

II. Es sind uns 2 Zonen einer Fläche bekannt, welchen Werth hat nun die Fläche?

Wir geben wiederum beiden Linien, d. h. beiden bekannten Zonenachsen gleiche Werthe in einer der 3 Dimensionen, z. B. in c und schreiben die erste (n c ; α a + β b), die zweite (n c ; α' a + β' b). Die gesuchte Fläche sei (α'' a : β'' b : n c), so ist

1) wenn α' a und β' b in gleicher Richtung liegen, mit α a und β b

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta - \beta'} \qquad \beta'' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha},$$

2) wenn α'a in gleicher Richtung mit αa, β'b in entgegengesetzter Richtung von βb liegt

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta + \beta'} \qquad \beta'' = \frac{\alpha\beta + \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

3) wenn α'a in entgegengesetzter Richtung von αa, β'b in gleicher mit βb liegt

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta' - \beta} \qquad \beta'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha' + \alpha}$$

4) wenn α'a und β'b in entgegengesetzter Richtung von αa und βb liegen

$$\alpha'' = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\beta + \beta'} \qquad \beta'' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' + \alpha}.$$

Beweis: Es sei Fig. LXIX p der in unserer Projections-Ebene liegende eine Endpunct der Zonenachse (nc; αa + βb) und q der in derselben Ebene liegende Endpunct der andern Zonenachse (nc; α'a + β'b) die gesuchte Fläche, welche von nc durch p und q läuft, schneidet nun im ersten unserer 4 Fälle nb und ma in a und b ab. Den Werth für m und n findet man nun auf folgende Weise.

Es sei pe und qd senkrecht auf der Dimension b, pg und qf senkrecht auf der Dimension a, Cg = pe = αa, Ce = pg = βb, Cf = qd = α'a, Cd = qf = β'b, Cm = α''a, Cn = β''b, so ist

Cn : pg = Cm : gm = Cm : Cm — Cg, d. i.

$$\beta''\mathrm{b} : \beta\mathrm{b} = \alpha''\mathrm{a} : (\alpha'' - \alpha)\,\mathrm{a}$$

$$\beta'' = \frac{\alpha''\beta}{\alpha'' - \alpha}, \text{ ebenso ist}$$

Cn : qf = Cm : fm = Cm : Cm — Cf, d. i.

$$\beta''\mathrm{b} : \beta'\mathrm{b} = \alpha''\mathrm{a} : (\alpha'' - \alpha')\,\mathrm{a}$$

$$\beta'' = \frac{\alpha''\beta'}{\alpha'' - \alpha'}, \text{ mithin}$$

$$\beta'' = \frac{\alpha''\beta}{\alpha'' - \alpha} = \frac{\alpha'' - \beta'}{\alpha''\alpha'} \text{ oder } \frac{\beta}{\alpha'' - \alpha} = \frac{\beta'}{a'' - \alpha'}$$

$$\alpha''\beta - \alpha'\beta = \alpha''\beta' - \alpha\beta'$$

$$\alpha'\beta - \alpha''\beta' = \alpha'\beta - \alpha\beta'$$
$$\alpha''(\beta - \beta') = \alpha'\beta - \alpha\beta'$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta - \beta'}, \text{ wie oben.}$$

Ebenso hat man

$$\mathrm{Cm : pe = Cn : en = Cn : Cn - Ce}, \text{ d. i.}$$
$$\alpha''\mathrm{a} : \alpha\mathrm{a} = \beta''\mathrm{b} : (\beta' - \beta)\,\mathrm{b}$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha\beta''}{\beta'' - \beta},$$

desgleichen $\mathrm{Cm : qd = Cn : dn = Cn : Cn - Cd}$

$$\alpha''\mathrm{a} : \alpha'\mathrm{a} = \beta''\mathrm{b} : (\beta'' - \beta')\,\mathrm{b}$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta''}{\beta'' - \beta}$$
$$\alpha'' = \frac{\alpha\beta''}{\beta'' - \beta} = \frac{\alpha'\beta''}{\beta'' - \beta'} \text{ oder } \frac{\alpha}{\beta'' - \beta} = \frac{\alpha'}{\beta'' - \beta'}$$
$$\alpha\beta'' - \alpha\beta' = \alpha'\beta'' - \alpha'\beta$$
$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = \beta''(\alpha' - \alpha)$$
$$\beta'' = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \text{ wie oben.}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die 3 andern Fälle beweisen.

III. Es ist uns eine Zonenachse und eine Fläche gegeben, gehört die Fläche dieser Zone an?

Die Fläche sei allgemein, ohne Rücksicht auf die verschiedenen Richtungen der Dimensionen $(\alpha\mathrm{a} : \beta\mathrm{b} : \mathrm{nc})$, die Zonenachse $(\mathrm{nc}\,; \alpha'\mathrm{a} + \beta'\mathrm{b})$. Wir geben auch hier wieder zuerst beiden gleiche Werthe in einer der 3 Dimensionen. Die Fläche gehört dann der geschriebenen Zone an, wenn eine der folgenden Proportionen richtig ist,

$$\alpha : \beta = \alpha' : \begin{cases} \beta - \beta' \\ \beta' - \beta \\ \beta' + \beta \end{cases} = \begin{cases} \alpha - \alpha' \\ \alpha + \alpha' \\ \alpha' - \alpha \end{cases} : \beta'$$

aus denen wiederum die Gleichungen für jede der Grössen α, α', β, β' in doppelter Gestalt sich ergeben. Ist keine

dieser Proportionen für die Werthe von a und b der Zonenachse und der Fläche richtig, so gehört die Fläche nicht der gegebenen Zone an.

Beweis: Es sei Fig. LXX C der Mittelpunct der Construction, Ca, Cb, die Dimensionen a und b, nm die Linie, welche in der Ebene durch a und b unsere Fläche ($\alpha a : \beta b : n c$) durch nc, senkrecht auf C gelegt gedacht, bildet, so dass $Cm = \alpha a$, $Cn = \beta b$. Die Zonenachse durch nc gelegt, wird, wenn die Werthe α' und β' endliche Grössen sind, irgend einen Punct der Ebene ab treffen, und die Fläche wird nur dann der Zone angehören, wenn dieser Punct in die Linie mn oder deren Verlängerung fällt.

Es sind 3 Möglichkeiten für das Zusammenfallen des zweiten Endpunctes der Zonenachse und eines Punctes der Projectionslinie unserer Fläche möglich.

1) Es fällt der Punct zwischen m und n, z. B. nach p, α' und β' sind dann in gleicher Richtung mit α und β, dann ist, wenn pe und pg senkrecht auf b und a gezogen sind, $pe = Cg = \alpha' a$, $pg = Ce = \beta' b$, $Cm = \alpha a$, $Cn = \beta b$ und

$$Cm : Cn = mg : gp = pe : en, \text{ d. i.}$$

$$\alpha a : \beta b = (\alpha - \alpha') a : \beta' b = \alpha' a : (\beta - \beta') b \text{ oder}$$

$$\alpha : \beta = \alpha - \alpha' : \beta = \alpha' : \beta - \beta',$$ wie oben die I. der 3 Proportionen.

2) Der zweite Punct der Zonenachse fällt in die Verlängerung von mn nach q, dann ist $\alpha' a$ in entgegengesetzter Richtung von αa, $\beta' b$ in gleicher mit βb, und wenn qd senkrecht auf b, qf auf a, so ist $Cf = dq = \alpha' a$, $Cd = fq = \beta' b$ und

$$Cm : Cn = dq : dn = mf : qf, \text{ d. i.}$$

$$\alpha a : \beta b = \alpha' a : (\beta' - \beta) b = (\alpha + \alpha') a : \beta b \text{ oder}$$

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' - \beta = \alpha + \alpha' : \beta,$$ wie oben die II. Bedingungsproportion.

3) Der zweite Endpunct der Zonenachse fällt in die Verlängerung nach r, dann ist $\alpha' a$ in gleicher Richtung mit αa,

β'b entgegengesetzter von βb, und wenn rt senkrecht auf a, rs senkrecht auf b gezogen wird, so ist rs = Ct = α'a, tr = Cs = β'b und

$$\mathrm{Cm} : \mathrm{Cn} = \mathrm{rs} : \mathrm{sn} = \mathrm{fm} : \mathrm{rt}, \text{ d. i.}$$

$$\alpha \mathrm{a} : \beta \mathrm{b} = \alpha' \mathrm{a} : (\beta' + \beta)\, \mathrm{b} = (\alpha' - \alpha)\, \mathrm{a} : \beta' \mathrm{b} \text{ oder}$$

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' + \beta = \alpha' - \alpha : \beta'$$ wie oben die III. Bedingungsproportion.

Eine oder mehrere Grössen α, β, $\alpha'\beta'$, n können = o oder ∞ werden. Welche Form dann die obigen Proportionen annehmen müssen, ergiebt sich leicht, wenn man für die betreffenden Grössen o oder ∞ einsetzt.

---

§. 82. Combinationen des ein- und einachsigen Systemes.

Wir haben schon pag. 231 kurz erwähnt, welche Verschiedenheit in Beziehung auf Flächenbildung in dem ein- und einachsigen Systeme an den einzelnen Mineralien vorkomme, und dass jedes seine besondern Wege der Flächenbildung einschlage. Es ist dieses eine Folge der Verschiedenheit in den 3 Grunddimensionen, d. h. eines anderen Verhaltens der Masse des Krystalles nach den 3 Richtungen. Dieses verschiedene Verhalten zeigt sich denn auch daran, dass an jeder Dimension ihre eigenen Flächen auftreten, dass nicht leicht in derselben Weise Flächen an allen Dimensionen vorkommen, oder wenn sie erscheinen, in ungleich starker Ausbildung an den verschiedenen Dimensionen. Daher kommen schon sehr selten Octaëder, die als ein Ausdruck des Gleichgewichts aller drei Dimensionen in Beziehung auf Flächenbildung anzusehen sind, allein vor, meistens erscheinen sie mit anderen combinirt. In Hinsicht auf ihre Gestalt lassen sich die Krystalle des ein- und einachsigen Systemes in 2 Abtheilungen bringen, in säulenförmige und

in tafelförmige. Bei den ersteren ist es die horizontale Zone mit den verschiedenen vertikalen Prismen, welche der ganzen Gestalt das auszeichnende giebt, bei letzteren ist es die obere und untere gerade Endfläche, die überwiegend auftritt und allen übrigen Flächen nur eine geringere räumliche Ausbildung gestattet. Wir erwähnten schon pag. 214, dass wir hauptsächlich 3 Paare von Flächen in diesem Systeme als characteristische und stets in einem oder dem andern Paare auftretende Flächen unterscheiden könnten. Es sind dies zugleich die Flächen, die als Hauptrepräsentanten dreier Hauptzonen, nehmlich der horizontalen und der I. und II. vertikalen erscheinen.

Meistens sind nun die Flächen einer dieser Zonen vorherrschend, räumlich, d. h. ihrem Flächeninhalte nach, am stärksten ausgedehnt, und combinirt mit denen einer der beiden andern. Sehr selten kommen die der dritten, noch seltener das dritte zugehörige Paar hinzu. Die gewöhnlichste Erscheinung ist bei den säulenförmigen das vertikale Prisma (a : b : ∞c) (g Taf. VIII) mit Flächen aus der ersten oder zweiten vertikalen Zone, die untergeordnet als Zuschärfungsflächen des Endes aufgesetzt auf die stumpfe Kante des Prismas an a im ersten Falle, oder auf die scharfe Kante desselben im zweiten Falle an der Dimension b erscheinen.

Häufig kommt auch die erste oder zweite Seitenfläche (a und b Taf. VIII) (a : ∞b : ∞c) und (∞a : b : ∞c) mit den Prismenflächen vor und erscheint dann als Abstumpfung der Kanten derselben. Nähert sich der Kantenwinkel des Prismas an b 120°, oder wird er genau 120, so erscheint die Säule, wenn die zweite Seitenfläche hinzutritt und sich mit den Prismenflächen ins Gleichgewicht setzt, als 6seitige Säule, oder wenn die geraden Endflächen hinzutreten, als 6seitige Tafel.

Ist die Gestalt mehr tafelartig, so treten auch die Flächen der horizontalen Zone mehr zurück, es erscheinen mehr die

Flächen aus den vertikalen Zonen und meistens sind es auch hier die Flächen aus einer der beiden Zonen, die vorherrschen, während die der andern zurücktreten und meist sind es auch hier verschiedenwerthige Flächen, die in beiden auftreten; kommen die Flächen unseres I. Paares ($a : \infty b : c$) vor, so erscheinen nicht leicht auch die Flächen des III. Paares ($\infty a : b : c$), sondern wenn Flächen aus dieser Zone auftreten, sind es solche, die durch 1c gelegt b $>$ oder $<$ als 1 schneiden, also stumpfer oder spitzer geneigt sind, als die Fläche des III. Paares.

Wir wollen einige Beispiele von flächenreichen Körpern des ein- und einachsigen etwas näher betrachten.

I. Combination des Topases (Taf. VIII, Fig. 93 und 94).

Wählen wir die mit o bezeichneten Flächen als Grundgestalt, so erhalten wir aus ihr das Verhältniss $a : b : c = 1{,}9 : 1{,}9 : 1$. Da die kürzere Achse a in Fig. 93 und 94 gegen den Beschauer gerichtet ist, so giebt sich sogleich zu erkennen, dass $M = (a : b : \infty c)$, d. h. unser II. Paar, die Abstumpfung der Lateralkanten des Octaëders ist. Aus dem Parallelismus der Kanten ergiebt sich, dass sowohl s als c in unsere vertikale Zone gehören, also jedenfalls von der Form $(a : b : \frac{1}{m} c) = (m a : m b : c)$ sind. Misst man nun den Winkel von s gegen M, so findet man, dass der Lateralkantenwinkel von den Flächen s, dessen Hälfte gleich dem gefundenen — 90° ist, in diesem Falle $= 124^\circ, 9' - 90 = 34^\circ,9'$ ist, während derselbe Winkel des Grundoctaëders $= 45^\circ, 27', 30''$. Die Tangenten dieser beiden Winkel sind aber, da $\lg \operatorname{tg} 45^\circ, 27, 5' = 10{,}0170858 - 10 = \lg 1{,}01645$ und $\lg \operatorname{tg} 34{,}9 = 9{,}8314374 - 10 = \lg 0{,}678324$ verhalten sich also $= 1{,}016 \ldots : 0{,}678 \ldots = 3 : 2 = 1 : \frac{2}{3}$.

Die Fläche s ist also $= (a : b : \frac{2}{3} c) = (\frac{3}{2} a : \frac{3}{2} b : c)$.

Die Fläche m bildet mit s und s parallele Kanten, sie erscheint also als gerade Abstumpfung der Kante zwischen s und c des Octaëders s, hat also das Zeichen $(\frac{3}{2} a : \infty b : c)$.

Die Fläche c gehört in die Lateralkantenzone von o, dann aber auch noch in eine Zone mit m und dem auf der entgegengesetzten Seite liegenden o. Mit Hülfe unserer Projectionsmethode der Flächen können wir leicht den Werth dieser Fläche finden. Es sei Fig. 94 b. o die Projection unserer Fläche o, Co = b, Ca = a, m die unserer Fläche m. Unsere neue Fläche soll nun in ein und dieselbe Zone mit o und m gehören und zwar mit dem o der entgegengesetzten Seite, d. h. also es soll mit den Projectionslinien von o und m in einem Punct sich schneiden. Dieser Punct kann aber kein anderer sein als w, weil nur in diesem die beiden Flächen o und m sich schneiden. Da aber c zugleich zur Lateralkantenzone von o gehört, muss es auch von a und b gleiche Stücke abschneiden, also parallel der Linie oa laufen. Ziehen wir nun durch w und w' Linien parallel ao und ao', so geben uns diese die Projection unserer Fläche und es lässt sich der Werth derselben leicht berechnen aus der Gleichheit der Dreiecke vwt und atw, die aus unsern Voraussetzungen leicht zu beweisen ist. Sind diese Dreiecke gleich, so ist vt = ta = $\frac{1}{2}$a, also vC = 2a und daher auch Cc = 2b. Unsere Fläche erhält daher das Zeichen c = (2a : 2b : c). Das Prisma l findet sich aus einer Messung seines Winkels als das von (a : $\frac{1}{2}$b : ∞c).

Die Fläche n gehört in 2 Zonen, deren Flächen uns bekannt sind, nehmlich in eine mit der vorderen Fläche s und der hinteren Fläche l, und umgekehrt in eine mit der hinteren Fläche s und der vorderen l und gehört der zweiten vertikalen Zone an, geht also ∞a. Es sei nun l die Projection unserer Säulenfläche l, s die unserer Fläche s; man sieht hier sogleich, dass die Fläche durch z und z als die einzigen l und s gemeinschaftlichen Puncte und parallel a laufen muss, und eben so leicht lässt sich dann berechnen, dass von der Dimension b $\frac{1}{2}$b abgeschnitten wird. Wir wissen nehmlich, dass die Fläche l von a nach $\frac{1}{2}$b läuft, also in

der Richtung von a nach d. Unserer Projectionsmethode nach muss sie aber ebenfalls durch c gelegt werden, also da sie parallel der Dimension c geht, durch den Mittelpunct der Construction C. Da aber Cz parallel da gezogen ist, so muss auch za, wenn es parallel der Dimension b gezogen ist, $= Cd' = \frac{1}{2}b = Cd$ sein; unsere Fläche wird also die $(\infty a : \frac{1}{2}b : c)$, dass $za = \frac{1}{2}b$, auch von der Fläche s abgeschnitten wird, ist eben so leicht zu beweisen, indem $az : Cs = ta : tC = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = 1 : 3$, also ist $az = \frac{1}{3} Cs = \frac{1}{3}$ von $\frac{3}{2}b = \frac{1}{2}b$.

Misst man die Combinationskante von y gegen n, so findet sich $y = (\infty a : \frac{1}{4}b : c)$. Die Fläche x erscheint gerade aufgesetzt auf l, gehört also in die vertikale Zone des Prismas l, muss also wie dieses das Verhältniss für $a : b = 1 : \frac{1}{2}$ haben. Zugleich gehört es aber in eine Zone mit o und n. Ziehen wir nun durch den einzigen o und n gemeinschaftlichen Punct f eine Linie parallel l, so finden wir daraus den Werth unserer Fläche $= (\frac{3}{2}a : \frac{3}{4}b : c)$. Wir haben nehmlich $fd = \frac{1}{2}a$ und $dC = \frac{1}{2}b$, $xC : Ct$ soll sein $= 1 : 2$ (wie das Verhältniss von $b : a$ der Fläche l). Nun ist $tC : Cx = fd : dx = 2a : 1b$. Da nun $fd = \frac{1}{2}a$, so muss $dx = \frac{1}{4}b$ sein. xC ist also $= \frac{3}{4}b$, da $dC = \frac{1}{2}b$, folglich wird der Werth für a dann $\frac{3}{2}$ und $x = (\frac{3}{2}a : \frac{3}{4}b : c)$ wie oben *).

Durch eine Messung erhält man den Werth für u $(a : \frac{1}{3}b : \infty c)$. Wir haben somit alle Flächen in ihren Werthen gefunden; nach den Zonenverhältnissen ordnen sie sich also:

1) in die vertikale Zone $(a ; b)$ gehören die Flächen
$o = (a : b : c)$ $s = (\frac{3}{2} : \frac{3}{2}b : c)$ $c = (2a : 2b : c)$ $M = (a : b : \infty c)$,

2) in die horizontale Zone (∞c) fallen die Flächen
$M = (a : b : \infty c)$ $l = (a : \frac{1}{2}b : \infty c)$ $u = (a : \frac{1}{3}b : \infty c)$,

*) x gehört auch in die Kantenzone von s zwischen a und c, muss also auch das Verhältniss $c : \frac{3}{2}a$ haben. Es muss also $a : b = 2 : 1$, $a : c = \frac{3}{2} : 1$ in dem Zeichen der Fläche sich finden. Man findet daher so noch einfaher $x = (\frac{3}{2}a : \frac{3}{4}b : c)$, indem $\frac{3}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 1$.

3) in die vertikale Zone (∞a)

$n = (\infty a : \frac{1}{2} b : c)$ $y = (\infty a : \frac{1}{4} b : c)$,

4) in die Zone der 3 Flächen c, m, o, Zonenachse $(c ; \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} b)$

(c ; w Fig.)

$o = (a : b : c)$ $m = (a : c : \infty b)$ $c = (2a : 2b : c)$,

5) in die Zone der Flächen x, o, n, Zonenachse $(c ; \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a)$

$= (c ; f)$

$o = (a : b : c)$ $n = (\frac{1}{2} b : c : \infty a)$ $x = (\frac{3}{2} a : \frac{3}{4} b : c)$ $M = (a : b : \infty c)$.

Dass die Fläche M auch in diese Zone gehöre, ersieht man aus unserer Figur und ist auch leicht zu berechnen. An der Darstellung des Krystalles zeigt sich dies nur dann, wenn sich die Fläche o so ausdehnte, dass sie auch mit der zweiten Fläche M zum Schneiden käme, in welchem Falle diese neue Kante parallel den zwischen o, x und n gebildeten sein würde.

Dergleichen versteckte Zonenverhältnisse kommen bei dieser Art der Darstellung der Flächen eines Krystalles noch manche zum Vorschein, die in der Natur nur dann sichtbar werden, wenn, wie dies sehr oft der Fall zu sein pflegt, sich einzelne Flächen unverhältnissmässig ausdehnen. Durch diese Unregelmässigkeit der Ausbildung der Krystallflächen im Vergleich mit unsern Modellen erhalten wir daher über die Zonenverhältnisse oft Aufschlüsse, die wir an diesen vergeblich suchen würden, und uns die besten Anhaltspuncte zur Bestimmung der Werthe der Flächen liefern.

II. Combination des Barytes (Taf. IX, Fig. 99).

An dieser tafelartigen Combination wählen wir am passendsten die Flächen o als Grundoctaëder, als dessen Lateralkanten-Abstumpfung, dann die Flächen g erscheinen, denen parallel die Krystalle sich leicht spalten lassen. Der Winkel, den g mit g macht, ist 101°, 40′, der von $\frac{d}{2}$ gegen $\frac{d}{2}$ 77°, 43°, woraus sich das Verhältniss von a : b und von a : c berechnen lässt.

Wählen wir o als Grundoctaëderfläche, so ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung $g = (a : b : \infty c)$ $a = (a : \infty b : \infty c)$ $b = (\infty a : b : \infty c)$ $c = (\infty a : \infty b : c)$ $f = (\infty a : b : c)$, indem es mit o und o parallele Kanten bildet.

Die Fläche $\frac{g}{2}$ gehört in die horizontale Zone, ebenso die Fläche t. Misst man nun den Winkel von t gegen b, so berechnet sich daraus der Werth für $\frac{g}{2}$ $(2a : b : \infty c)$ $= (a : \frac{1}{2}b : \infty c)$.

Die Fläche y gehört zur Endkantenzone von o, was sich aus dem Parallelismus der Kanten von o, y, f, o zu erkennen giebt. Zugleich gehört sie aber in die vertikale Zone des Prismas $\frac{g}{2}$, indem sie mit diesem eine horizontale Kante bildet. Sie muss also das Verhältniss $b : c$ und $a : \frac{1}{2}b$ in ihrem Zeichen haben, also wird $y = (2a : b : c)$. Die Fläche $\frac{d}{2}$ bildet mit den beiden zu seiner Seite gelegenen y parallele Kanten, erscheint also als Abstumpfung der von c nach 2a laufenden Kante des Octaëders $(2a : b : c)$. Es wird daher $\frac{d}{2} = (2a : \infty b : c)$. Misst man den Winkel zwischen s und t, so findet man daraus $t = (a : \frac{3}{2}b : \infty c)$.

Es ordnen sich daher die Flächen nach den verschiedenen Zonen auf folgende Weise. Es gehören in die

1) I. Kantenzone des Octaëders o, Zonenachse $(b ; c)$
   $o = (a : b : c)$ $y = (2a : b : c)$ $f = (\infty a : b : c)$,
2) I. vertikale Zone, Zonenachse (∞a)
   $c = (\infty a : \infty b : c)$ $f = (\infty a : b : c)$ $b = (\infty a : b : \infty c)$,
3) II. vertikale Zone, Zonenachse (∞b)
   $c = (\infty a : \infty b : c)$ $\frac{d}{2} = (2a : \infty b : c)$ $a = (a : \infty b : \infty c)$,
4) horizontale Zone, Zonenachse (∞c)
   $b = (\infty a : b : \infty c)$ $\frac{g}{2} = (a : \frac{1}{2}b : \infty c)$ $g = (a : b : \infty c)$
   $t = (a : \frac{3}{2}b : \infty c)$ $a = (a : \infty b : \infty c)$.

Hier ist es also die horizontale Zone, welche einen besonderen Reichthum von Flächen zeigt, während die übrigen nur wenige Flächen aufzuzeigen haben, die nicht zugleich mit in die horizontale Zone gehörten. Beim Topas dagegen war die horizontale Zone, weniger reich an Flächen und alle Flächen der horizontalen Zone gehörten stets zugleich noch in andere Zonen, aber von der bei ihm so mächtigen Entwicklung verschiedener Octaëderflächen finden sich nur schwache Anfänge bei dem Baryt, und namentlich fehlen letzterem alle Flächen aus der Lateralkantenzone des Grundoctaëders mit Ausnahme von diesem selbst, das sehr häufig vollkommen verschwindet und wo es auftritt, nur sehr untergeordnet sich zeigt, ebenso wie die übrigen Flächen aus den vertikalen Zonen, so dass die Krystalle des Baryts oft ausser den schiefen Endflächen $\frac{d}{2}$ oder $f_{,}$ nur noch Flächen aus der horizontalen Zone erkennen lassen.

Auch hier, wie überall im rhombischen Systeme, giebt sich zu erkennen, wie die verschiedenen Glieder des Systemes einen verschiedenen Gang der Entwicklung von Flächen einschlagen. So kommen zwar die 3 zusammengehörigen Paare alle im Krystallisationssysteme des Barytes vor, aber fast nie an einem und demselben Krystalle; dass zwei zusammen erscheinen, wie g und f (Taf. IX, Fig. 97) und $\frac{d}{2}$ und $\frac{f}{2}$, Taf. VIII, Fig. 87 ist ziemlich häufig, meist ist dann aber das eine von beiden stärker ausgedehnt, als das andere und lässt dem anderen nur wenig Raum. Häufig kommt statt des III. zugehörigen Paares an seiner Stelle eine andere Fläche desselben vertikalen Zone vor, es sind dies die Flächen $\frac{d}{2}$. Wo sie mit g den Flächen unseres II. Paares allein an dem Ende auftreten, giebt sich sogleich (Fig. 97) zu erkennen, dass sie nicht zusammengehörige Paare sind, in dem die Flächen als Rhomben erscheinen müssten, wenn dies der

Fall sein sollte (pag. 215). Statt dessen sind aber beide oder bei ungleicher Ausdehnung eine wenigstens symmetrische Trapezoide.

So zeigt jedes Mineral seine besonderen Eigenthümlichkeiten in Beziehung auf Flächenbildung und der grössere Reichthum an verschiedenartigen, einfache Körper bildenden Flächen des regulären Systems wird durch diese Mannigfaltigkeit und die grössere Freiheit der verschiedenen Species, durch die Unabhängigkeit von einem allen gemeinschaftlichen Grundgesetze der 3 dreierlei Dimensionen in dem ein- und einachsigen Systeme zur Genüge ersetzt.

Zwei- und eingliedriges System.

§. 83. Monoklinoëdrisches System (Naumann). Hemiprismatisches System (Mohs).

Während für die bisherigen Systeme in der Wahl der Achsen und in der Vorstellung von ihrer Beschaffenheit durchaus keine Verschiedenheit der Ansichten bei den Krystallographen herrscht, ist diese Uebereinstimmung für dieses und das nächstfolgende System nicht mehr vorhanden.

Während nehmlich die einen (wie Naumann, Mohs und G. Rose) für diese Systeme keine rechtwinkligen Achsen mehr annehmen, sondern eine, zwei oder alle drei unter schiefen Winkeln sich schneidend, wird dieses von andern mit Weiss als unnöthig und unnatürlich bezeichnet, und auch für diese Systeme 3 rechtwinklige Achsen angenommen. Auch ich werde im folgenden von der Voraussetzung rechtwinkliger Achsen für diese Systeme ausgehen, indem ich es auch für naturgemässer und einfacher halte, als die Annahme schiefwinkliger Achsen.

Betrachtet man nehmlich die dreiachsigen Systeme, von dem regulären als dem einfachsten und symmetrischen aus-

gehend, so stellt sich durch die übrigen immer mehr die Tendenz zum Ungleichartigwerden dessen heraus, was im regulären Systeme noch vollkommen gleichartig, indifferent sich verhält. Diese Differenz lässt sich Schritt für Schritt verfolgen, mit jedem Krystallsystem ist in der Ordnung, wie wir sie betrachtet haben, gleichsam ein Schritt weiter zur grösseren Unabhängigkeit der einzelnen Glieder von einander geschehen, die in dem nächstfolgenden, dem ein- und eingliedrigen den höchsten Grad erreicht.

Bei dem regulären Systeme zeigt sich, wie wir sahen, durchaus keine Ungleichheit in den 3 Hauptdimensionen, es tritt nirgends eine Differenz ein, die 6 Hälften oder Glieder der 3 Achsen oder die Masse des Krystalls in diesen Richtungen verhalten sich durchaus vollkommen gleich. Alle Flächen, die an der einen erscheinen, zeigen sich auch an der andern.

In dem zwei- und einachsigen Systeme ist es einer der 3 Richtungen gelungen, sich aus der Gleichheit mit den andern loszureissen. Sie geht ihren eigenen Weg bei der Entwicklung von Flächen, während die beiden andern noch vollkommen gleich sich verhalten.

Im ein- und einachsigen Systeme sind alle 3 Richtungen verschieden, jede entwickelt unabhängig von der andern ihre eigenthümlichen Flächen, jede verhält sich anders. Wie wir sahen, halten sie jedoch nicht gleichen Schritt in dieser Beziehung. Nicht zufrieden damit, dass jede ihre Unabhängigkeit sich selbst errungen, sucht nun eine oder die andere sich auf Kosten der dritten übermässig zu entwickeln. Unsere 3 Paare von Flächen, oder unsere 3 denselben entsprechenden Zonen, die horizontale und die beiden vertikalen, kommen nie gleichmässig, harmonisch ausgebildet und mit Flächen versehen vor, meistens verdrängen zwei die dritte und die Flächen der dritten Zone.

Im zwei- und eingliedrigen Systeme geht dieser Zwiespalt, diese Differenz noch weiter. Die Unterdrückung des

einen der 3 Paare, der Flächen der ersten der 3 Zonen tritt noch schärfer ausgeprägt hervor, ja es erhebt sich ein neuer Usurpator. Während bisher nehmlich noch immer die gleichen Glieder, d. h. die 2 Hälften einer Achse sich gleichmässig gegen einander und gegen die andern verhielten, tritt jetzt in einem der noch übrig gebliebenen Paare, welche das dritte unterdrückt haben, eine Differenz in den beiden Gliedern ein, jedes entwickelt unabhängig von dem andern Flächen, eines sucht das andere ebenfalls wieder zu unterdrücken, den Raum zur Bildung von Flächen für sich allein in Anspruch zu nehmen, wie wir es bei der ausführlicheren Betrachtung dieses Systemes genauer besprechen werden. Im ein- und eingliedrigen Systeme endlich verschwindet vollends die letzte Gleichheit, die beiden im zwei- und eingliedrigen Systeme noch gleichgebliebenen Glieder werden nun ebenfalls noch different, nirgends finden sich mehr gleiche Glieder, es sind nur noch parallele Flächen an den verschiedenen Enden, nicht mehr 2 gleiche an verschiedenen Seiten einer Dimension möglich.

Dieser Zusammenhang oder, wenn man will, dieser Fortschritt, der sich auf diese Weise durch alle dreiachsigen Systeme hindurch verfolgen lässt, wird aber zerrissen und abgeschnitten, sowie man schiefwinklige Achsen annimmt. Die letzteren lassen dann gar keinen Anschluss an die ersteren zu, und stehen völlig isolirt, ebenso würden wir aber auch die Art und Weise der Ausbildung vermissen, in dem Sinne, wie wir sie so eben als in dem zwei- und ein-, und ein- und eingliedrigen Systeme verwirklicht dargestellt haben, die wir gewiss mit Recht erwarten durften, wenn wir nicht annehmen wollen, dass die Natur auf halbem Wege stehen geblieben sei.

Dass aber wirklich letzteres nicht der Fall sei, das beweisen schon diejenigen Mineralien des zwei- und eingliedrigen Systemes, bei denen man schlechterdings rechtwinklige Achsen annehmen muss, bei welchen es selbst von denen geschieht,

welche sonst der Annahme schiefwinkliger Achsen zugethan sind, wie beim Augit und dem Wolfram.

Wir haben also jedenfalls unzweifelhaft Beispiele, durch welche uns die Natur mit Bestimmtheit darthut, dass es ein zwei- und eingliedriges System in unserm Sinne giebt; ob wir aber wirklich mit derselben Nothwendigkeit zur Annahme schiefwinkliger Achsen hingetrieben werden, dafür muss erst noch der Beweis geliefert werden. So lange dies nicht geschieht, möchte die Annahme schiefer Achsen, selbst wenn sie für die Werthe mancher Flächen einzelner Krystalle einfachere Ausdrücke gäbe, als dies mit der Annahme von rechtwinkligen Achsen möglich wäre, als nicht nothwendig erscheinen. Das zwei- und eingliedrige System ist daher, was die geometrischen Verhältnisse seiner Begränzungselemente betrifft, von dem ein- und einachsigen durchaus nicht verschieden. Es ist nur die Ausbildung der Flächen der Zahl nach, welche dasselbe in gewissen Richtungen von dem ein- und einachsigen verschieden macht. Welches der 3 Paare von Flächen, welche wir am ein- und einachsigen Systeme unterschieden haben, das vollkommen verschwindende, welches das sei, in welchem die Differenz zwischen seinen zwei Gliedern eintritt, das ist bei den verschiedenen Mineralspecies verschieden. In der Regel und nur sehr wenige Ausnahmen möchten von ihr vorkommen, sind die Flächen der horizontalen Zone also die Flächen, welche ∞c in ihrem Zeichen haben, ganz in derselben Weise ausgebildet, wie bei dem ein- und einachsigen Systeme. Von den Flächen des ersten Paares verdrängt dann meistens die eine, die wir als vordere betrachten wollen, die hintere, während die des dritten zugehörigen Paares oder Flächen aus dieser Zone fast nie beobachtet worden sind.

§. 84. Als schicklichster Ausgangspunct, gewissermassen als Grundgestalt, betrachten wir daher einen Körper, der das Analogon des Oblongoctaëders im ein- und einachsigen

Systeme darstellt, das von Weiss sogenannte Hendyoëder. Es ist eine 4seitige Säule mit der schiefen Endfläche, aus dem Oblongoctaëder dadurch entstanden, dass die eine seiner beiden Zuschärfungsflächen eben von der andern verdrängt wird; bei dem Feldspath z. B. Fig. LXXIII, bestehend aus den 4 Flächen (a : b : ∞ c) und den 2 (a : ∞ b : c) und (a' : ∞ b : c'), während die Fläche (a' : ∞ b : c) und (a : ∞ b : c') verdrängt worden sind. Die Fläche des Oblongoctaëders a f g dehnte sich mit Verdrängung der Fläche a'f g zur schiefen Endfläche a f d g aus, ebenso am untern Ende die Oblongoctaëderfläche a'h i mit Verdrängung der Fläche a h i zur Endfläche a'h k i. Alle Flächen nun, die zwischen den Säulen- und Seitenflächen einerseits und der schiefen Endfläche andererseits vorkommen, also mit andern Worten alle den Octaëderflächen des ein- und einachsigen Systemes entsprechenden, erscheinen stets nur zu zweien, die beiden andern fehlen. Kommen sie zwischen a, b und c und a, b' und c vor, so findet man sie nicht zwischen a', b und c, oder a', b' und c, wohl aber können hier andere Flächen vorkommen. Wegen dieses Gesetzes müssen daher bei diesem Krystallsysteme für alle hierhergehörigen Flächen, die zweierlei Hälften der Achsen unterschieden werden und im Zeichen ausgedrückt sein, welche der Hälften gemeint ist. Wir bezeichnen daher mit a die vordere, dem Beschauer zugekehrte Dimension a, mit a' die hintere, mit b die rechte, mit b' die linke Dimension b, wiewohl für die Dimension b dieser Unterschied wegfällt, wenn er sich an a bemerklich macht, d. h. wenn in den Gliedern a die Differenz eintritt; umgekehrt ist es nicht nöthig, die Dimensionen a zu unterscheiden, wenn in b die Differenz liegt.

Was nun die geometrischen Eigenschaften betrifft, so hat die schiefe Endfläche dieselben Verhältnisse für ihre Winkel mit den Säulen- und Seitenflächen, wie die Fläche des Oblongoctaëders gegen dieselben, hatten daher für die

1) **Neigung der schiefen Endfläche gegen die Säulenfläche,** dasselbe wie für die Neigung der zweier Paare im ein- und einachsigen Systeme gegen einander, nehmlich für Neigung der Fläche (a : ∞b : c) gegen (a : b : ∞c)

$$\sin : \cos = a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : b\,c \text{ (pag. 225)},$$

2) **für die Neigung der schiefen Endfläche gegen die I. Seitenfläche,** d. h. gegen (a : ∞b : ∞c)

$$\sin : \cos = a : c,$$

d. h. für das Complement dieses Winkels zu 2 R, das gleich dem Neigungswinkel der Kante (a ; c) gegen c ist,

3) **für die Neigung der schiefen Endfläche gegen die II. Seitenfläche** gegen (∞a : b : ∞c),

alle schiefen Endflächen bilden mit dieser rechte Winkel,

4) **für die Neigung der verschiedenen Octaëderflächen**

a) gegen die Seitenflächen

$$\sin : \cos = ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2(n-m)^2} : c(ma^2 + nb^2)$$

b) gegen die Säulenfläche 1) (a : ∞b : ∞c) und
2) (∞a : b : ∞c)

$$\sin : \cos = 1)\ a\sqrt{b^2 + m^2c^2} : nbc \text{ und}$$

$$2)\ b\sqrt{a^2 + n^2c^2} : mac.$$

Hiebei ist jedoch der Unterschied zwischen a und b und a' und b' wohl zu beachten, ebenso, dass auch wie pag. 230 diese Verhältnisse für den Complementwinkel des gesuchten Kantenwinkels gelten.

§. 85. Auch bei diesem Systeme kommen dieselben Arten von Flächen vor, wie bei den übrigen, nehmlich solche, welche nur 1, oder solche, welche 2, und solche, welche alle drei Achsen schneiden. Der Unterschied von dem ein- und einachsigen Systeme zeigt sich nur bei den letzteren beiden

Arten, wenn sie zwischen den Dimensionen erscheinen, in welchen die Differenz unter den im ein- und einachsigen Systeme noch gleichen Gliedern eingetreten ist. Ist wie beim Feldspath (Fig. LXXIII) die Differenz in der Richtung zwischen a und c in den Gliedern a eingetreten, so zeigt sich die Verschiedenheit von dem ein- und einachsigen Systeme in allen a und c schneidenden Flächen, alle diese kommen nur halb so oft, wie beim ein- und einachsigen Systeme vor; sind es Octaëderflächen, so fehlen die vorderen, wenn die hinteren ausgebildet sind, sind es horizontale Prismen, so erscheint in der Regel nur die eine Fläche, während alle a und b schneidenden, parallel c laufenden Flächen mit derselben Anzahl auftreten, wie im ein- und einachsigen Systeme.

Ueber die Art und Weise nun, wie diese verschiedenen im zwei- und eingliedrigen Systeme möglichen Flächen an verschiedenen Mineralspecies auftreten, lässt sich eben so wenig, wie bei dem ein- und einachsigen Systeme ein allgemeines Gesetz aufstellen. Jede Species hat hier ihre eigenen Gesetze. Bald treten, wie bei dem Feldspath, die Flächen aus der I. vertikalen Zone in grosser Mächtigkeit auf und lassen in Verbindung mit denen aus der horizontalen Zone, welche ebenfalls sehr ausgedehnt erscheinen, die zwischen beiden liegenden Octaëderflächen nur in geringer Ausdehnung erscheinen, bald haben diese, wie bei Hornblende und Augit, die Oberhand über die Flächen der erstgenannten Zone. Häufig erscheinen in diesen Fällen neben den Flächen der horizontalen Zone, den Prismen- und Säulenflächen, nur zwei Octaëderflächen, welche die schiefe Endfläche vollkommen verdrängen, wie (Taf. IX, Fig. 107) die Flächen s und s, als deren gerade Combinationskanten-Abstumpfung unsere schiefe Endfläche erscheinen würde. Diese beim Augit so characteristische Erscheinung hat daher den Namen „augitische Zuschärfung“ erhalten.

§. 86. *Zonenverhältnisse des zwei- und eingliedrigen Systems.*

Auch diese sind ganz dieselben wie bei dem ein- und einachsigen Systeme, nur ist es zweckmässiger, manchen derselben andere Namen zu geben, die sich unmittelbar aus der Anschauung ergeben, während andere, die dieselbe Bedeutung haben, weniger in die Augen fallend erscheinen würden, so ist z. B. die erste Kantenzone des Octaëders nehmlich der Kante A, die von a nach c geht, beim ein- und einachsigen Systeme noch als Kantenzone mit Recht bezeichnet worden, weil diese noch oft zum Vorschein kommt und von dem Auge leicht die ihr parallel laufenden Kanten aufgefasst werden können. Im zwei- und eingliedrigen Systeme erscheint sie seltener, weil, wie wir sahen, die Octaëderflächen selten so stark entwickelt vorkommen, dass sie miteinander Kanten bilden. Statt ihrer erscheint sehr häufig die gerade Abstumpfung dieser Kante, unsere schiefe Endfläche, deren Diagonale wie die erwähnte Kante von a nach c läuft; wir nennen daher in diesem Systeme diese Zone am besten die Diagonalzone der schiefen Endfläche. Ebenso halten wir es auch mit den übrigen Kantenzonen. Wie wir beim ein- und einachsigen Systeme von einer (End-) Kantenzone des II. schärferen, dreifach schärferen Octaëders sprachen, so nennen wir diese, wenn sie hier vorkommen, die Diagonalzone der II. schärferen, dreifach schärferen schiefen Endfläche. Wir haben daher folgende Zonen besonders ins Auge zu fassen.

1) Die horizontale Zone, Zonenachse (∞c).

Es gehören in dieselbe

1) die Flächen des II. Paares . . . (a : b : ∞c)
2) vertikale Prismen von der Form (ma : b : ∞c)
3) „ „ „ „ „ (a : mb : ∞c)
4) die Seitenflächen . . . . (a : ∞b : ∞c)

5) die Seitenflächen (∞a : b : ∞c).

Diese Zone ist vollkommen übereinstimmend mit derselben beim ein- und einachsigen Systeme.

2) Die I. vertikale Zone, Zonenachse (∞b).

Es gehören in dieselben

1) die vordere schiefe Endfläche .... (a : ∞b : c)

2) die hintere schiefe Endfläche *) ..... (a′: ∞b : c)

3) die Seitenflächen .... (a: ∞b : ∞c) und (a′: ∞b : ∞c)

4) stumpfere schiefe Endflächen von der Form (ma : ∞b : c) und (ma′: ∞b : c)

5) schärfere schiefe Endflächen von der Form ($\frac{1}{m}$a : ∞b : c) und ($\frac{1}{m}$a′: ∞b : c).

Alle Flächen dieser Zone mit Ausnahme der Seitenfläche, welche auch zur horizontalen Zone gehört und daher wie beim ein- und einachsigen Systeme erscheint, kommen in der Regel nur zur Hälfte vor, und zwar die einen vorne, andere hinten.

3) Die II. vertikale Zone, Zonenachse (∞a).

Es gehören hierher

1) die Seitenflächen (∞a : b : ∞c),

2) die Flächen des III. zugehörigen Paares (∞a : b : c).

Die letztere dieser beiden Flächen ist bis jetzt nur beim Feldspath beobachtet worden, die erste gehört zugleich in die horizontale Zone, so dass, wenn wir vom Feldspath absehen, Flächen, die dieser Zone eigenthümlich angehören, aus dem zwei- und eingliedrigen Systeme ausgeschlossen erscheinen.

4) Diagonalzone der schiefen Endfläche (a: ∞b:c), Zonenachse (a ; c).

Es gehören in diese Zone

1) die schiefe Endfläche ..... (a : ∞b : c)

2) Octaëderflächen von der Form (a : b : c)

*) Sie kommt jedoch sehr selten zugleich mit der vorderen vor.

3) Octaëderflächen von der Form $(a : mb : c)$

4) „ „ „ „ $(a : \frac{1}{m}b : c)$

5) die Seitenfläche . . . . $(\infty a : b : \infty c)$.

5) Kantenzone der schiefen Endfläche, Zonenachse $(a ; b + c)$.

Diese Kante entspricht der Kante des Oblongoctaëders; es ist die Kante zwischen den Flächen unseres I. und II. Paares, in diesem Systeme die Kante zwischen der schiefen Endfläche und Säulenfläche.

Es gehören in dieselbe

1) die Prismenflächen . . . . . . $(a : b : \infty c)$

2) Octaëderflächen von der Form $(a' : b : mc)$ oder $(\frac{1}{m}a' : \frac{1}{m}b : c)$

3) „ „ „ „ $(a' : \frac{1}{n}b : c)$ und $(\frac{1}{m}a' : \frac{1}{n}b : c)$

4) „ „ „ „ $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}b : c)$ und $(\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c)$.

Nur müssen sie der Bedingung entsprechen, das $\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b = (1 \pm \frac{1}{m})\ a : b$, wo m und n alle Werthe a = a oder = a' sein kann. Sie erscheinen grösstentheils als Abstumpfungen der Kanten zwischen den beiden erwähnten Flächen oder der Kanten der schiefen Endfläche und der Säulenfläche, auch als Abstumpfung der Ecke zwischen schiefen Endflächen und 2 Säulenflächen, oder zwischen jener und der Seitenfläche, wie die Fläche m Taf. X, Fig. 119 und o Fig. 117. Die bei dem ein- und einachsigen Systeme oft noch so wichtigen Kantenzonen der Kante B zwischen b und c, und der Kante C, zwischen a und b tritt in dem zwei- und eingliedrigen Systeme vollkommen in den Hintergrund.

Zum besseren Verständniss der Eigenthümlichkeit dieses Systemes wollen wir im folgenden einige der characteristischsten Mineralien desselben etwas näher betrachten, wobei sich zugleich die Gelegenheit ergeben wird, für die Berechnung der Werthe der Flächen dieses Systemes sowohl, wie der Grunddimensionen, die von der des ein- und einachsigen Systemes nicht abweicht, Beispiele anzuführen. Wir wählen hiezu den Feldspath und den Epidot, da diese beiden Mine-

ralien durch die ausgezeichneten Arbeiten von **Weiss** *), deren Studium für jeden, der sich mit den Eigenthümlichkeiten der Krystallisationsgesetze des zwei- und eingliedrigen Systemes überhaupt, insbesondere aber dieser beiden Hauptrepräsentanten desselben vertraut machen will, unerlässlich ist, uns selbst in ihren verwickeltsten und schwierigsten Verhältnissen aufs genaueste bekannt und deutlich geworden sind, und da sie, wie kaum andere Species dieses Systemes, einen ausserordentlichen Reichthum an Flächen aufzuweisen haben. Wir bedienen uns auch hierbei wieder der graphischen Methode, deren Vortheile mit den wachsenden Schwierigkeiten des Verständnisses und der Uebersicht über ein System sich in immer hellerem Lichte zeigen.

§. 87. *Betrachtung des Feldspathes.* (Taf. X.)

Wenn wir die Fig. 116 — 122 von der Seite, d. h. so, dass die Dimension b auf den Beschauer gerichtet ist, dargestellten Flächen des Feldspathes nach Zonen ordnen, so finden wir sie in folgenden Zonen. Es liegen

1) in der vertikalen Zone, deren Zonenachse (∞b) die schiefen Endflächen t, P, q, x, r, y und die Seitenfläche k (Fig. 116, 117 und 118),
2) in der horizontalen Zone die Flächen k, T, z, M, (Fig. 116),
3) in der Diagonalzone der Fläche P die Flächen h, n, i, M (Fig. 120),
4) in der Kantenzone der schiefen Endfläche P die Flächen T, m, P, g, o und u,
5) in der Diagonalzone der hintern schiefen Endfläche x die Flächen x, o, s, M (Fig. 119),

---

*) cfr. Die Abhandl. der k. Ac. der Wiss. zu Berl. für das Jahr 1816 und 17, 1820 und 21 etc. für den Feldspath — 1818 und 19 für den Epidot. —

6) in ein und derselben, noch näher zu bestimmenden Kantenzone der schiefen Endfläche t mit T liegen die Flächen T, t, m, n, s, v (Fig. 119 und 118),

7) ebenso in einer die Flächen z, v, o, q, n (Fig. 116 und 118),

8) ebenso bemerklich macht sich die Kantenzone von y mit T, in der die Flächen y, o, n, d, T erscheinen (Fig. 116 und 120).

Es liessen sich aus den dargestellten Figuren noch mehrere solcher Zonen auffinden; wir übergehen dieselben jetzt, und wollen sehen, wie weit die angeführten zur Berechnung der Werthe der verschiedenen Flächen und der 3 Dimensionen reichen. Wenn die Flächen M als die Säulenflächen ($a : b : \infty c$) angenommen werden, so finden wir aus dem Winkel derselben, der genau 120 ist, das Verhältniss von $a : b = 1 : \sqrt{3}$. Nehmen wir die Fläche P, der parallel der eine höchst vollkommene blättrige Bruch geht, als die Fläche unseres I. Paares als ($a : \infty b : c$) und x als ($a' : \infty b : c$), so giebt uns der halbe Winkel, den diese beiden an c miteinander bilden, das Verhältniss von $a : c$. Die beiden gleichgeneigten Flächen P und x bilden nehmlich miteinander einen Winkel von nahe $128^\circ, 40', 56''$. Nehmen wir diese Zahl an, so ist für die Hälfte desselben $= 64^\circ, 20', 28''$ sin : cos $= a : c$. Nun ist $\lg tg\, 64^\circ, 20', 28'' = 0{,}3184114$. Multipliciren wir diesen lg mit 2, erheben wir also die zu demselben gehörige Zahl dadurch aufs Quadrat, so erhalten wir $0{,}6368228 = \lg 4{,}3333\,..$ $= \lg tg^2\, 64^\circ, 20', 28''$. Es ist also $a : c = \sqrt{4{,}3333\,..} : 1$ $= \sqrt{13} : \sqrt{3}$. Für das Verhältniss von $a : b : c$ erhalten wir dann die Werthe $1 : \sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{13}}$ oder $\sqrt{13} : \sqrt{3\,.\,13} : \sqrt{3}$.

Bei dieser Annahme der 3 Dimensionen bestimmen sich dann unmittelbar ausser P und x, die wir als ($a : \infty b : c$) und ($a' : \infty b : c$) angenommen haben, T als ($a : b : \infty c$), M als ($\infty a : b : \infty c$), k als ($a : \infty b : \infty c$). Die Fläche g erscheint mit x und P verbunden (Fig. 122) als Rhombus und

würde diese beiden Flächen, wenn sie sich ausdehnte, ebenfalls zu Rhomben machen, was aus dem Parallelismus ihrer Kanten (Fig. 122) und daraus, dass sie mit M Fig. 121 eine horizontale Kante bildet, also jedenfalls parallel a läuft, deutlich hervorgeht. Sie ist mithin die Fläche unseres III. zugehörigen Paares (∞ a : b : ∞ c), eine Erscheinung, die ausser beim Feldspath, wo sie ebenfalls sehr selten ist, bei keinem Mineral des zwei- und eingliedrigen Systemes bisher beobachtet wurde. Sehen wir bei Betrachtung der 8 oben angegebenen Zonen von den 3 ersten ab, so erscheint uns die Fläche o in allen andern mit Ausnahme der 6ten. Von ihr aus lassen sich Zonen verfolgen, in denen alle Flächen enthalten sind und es wird daher die Bestimmung der Fläche o vor allem von der grössten Wichtigkeit. Ihren Werth finden wir leicht auf folgende Weise. Sie gehört, wie aus dem Parallelismus der Kanten, welche die beiden Flächen o auf der Fläche x bilden, folgt, in die Diagonalzone dieser Fläche x. Diese Diagonale läuft von a' (γ Taf. X) nach c. Zugleich gehört sie aber auch in die Kantenzone der Fläche P und T, wie aus dem Parallelismus der Kanten zwischen o, P, m und T zu ersehen (Fig. 117 und 118), und zwar in die der Kante auf der entgegengesetzten Seite. Die Fläche T der entgegengesetzten Seite, z. B. die der rechten durch 1 c gelegt, wird durch den Mittelpunct gehen und dann auf die linke Seite nach α' Fig. 122 b gehen. Ziehen wir nun von γ dem Endpuncte a' der Zonenachse (a'; c) eine Linie nach α', dem Endpuncte (a + b) der Zonenachse der Kantenzone (c ; a + b), so haben wir damit die Projection der Fläche o und wir finden aus der Proportion $\gamma C : \gamma\beta = C\delta : \beta\alpha'$, da $\gamma C : \gamma\beta = 1 : 2$, $C\delta = \frac{1}{2}\beta\alpha = \frac{1}{2}b$, also wird o = (a' : $\frac{1}{2}$b : c). Wegen des Parallelismus der 2 Kanten dieser Flächen zwischen x und M und der zwischen T und P erscheint diese Fläche, wenn sie mit diesen allein vorkommt, als ein Rhomboid und hat daher den Namen Rhomboidfläche erhalten. Sie ist eine im zwei- und ein-

gliedrigen Systeme sehr häufig vorkommende und sehr wichtige Fläche, die, wo sie vorkommt, immer als ein Rhomboid erscheint. Die Fläche n gehört in die Diagonalzone der Fläche P, zu gleicher Zeit aber auch in eine Zone mit o und T derselben Seite, in welcher Zone zugleich die schiefe Endfläche y liegt. Ziehen wir nun eine Linie von dem Endpuncte der Diagonale von P in a durch den gemeinschaftlichen Projections-Punct von o und T, und ebenso eine parallel b durch denselben Punct als Projection der Fläche y, durch ε Fig. 122 b, so haben wir die ähnlichen Dreiecke $T'\varepsilon\gamma$ und $\alpha\varepsilon\alpha'$, also ist $T'\gamma : \alpha'\alpha = \gamma\varepsilon : \varepsilon\alpha'$, $T\gamma$ ist $=$ b, $\alpha'\alpha = 2$ b, also ist $\gamma\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon\alpha'$. Daraus finden wir nun den Werth für y $= (\frac{1}{3}\,a' : \infty b : c)$, indem $\gamma\varepsilon : \varepsilon\alpha = \gamma\pi : \pi\beta$, $\gamma\varepsilon$ ist $= \frac{1}{3}\gamma\alpha$, also ist $\gamma\pi = \frac{1}{3}\gamma\beta = \frac{1}{3}$ von $2\,a = \frac{2}{3}\,a$, also $C\pi = \gamma C - \pi\gamma = a - \frac{2}{3}\,a = \frac{1}{3}\,a$. Auf dieselbe Weise lässt sich nun berechnen, dass das durch die Fläche n abgeschnittene Stück von b $= \frac{1}{4}$ wird, also unsere Fläche n $= (a : \frac{1}{4}\,b : c)$.

Die Fläche q gehört in die vertikale Zone, geht also parallel b und (Fig. 116) in 2 Zonen, die von je einem o der einen Seite zu dem n der andern gehen (in der Fig. 116 von vorne nach hinten), dadurch werden uns die 2 Zonenpuncte τ und ζ (Fig. 122 b) bestimmt. Nun ist $\tau\varphi : \tau\varphi + \varphi\alpha' = \varphi\varrho : \alpha'\beta$, d. h. $\tau\varphi : \tau\varphi + 1 = \frac{3}{4} : 1$ (wo wir a und b weglassen, weil die beiden Glieder der einen Seite a, die der andern b als Factor haben), daraus findet man $\tau\varphi = (\tau\varphi + 1)\,\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}\tau\varphi = \frac{3}{4}$, $\tau\varphi = 3$, also q $= (3\,a' : \infty b : c)$.

Die Fläche z gehört in die horizontale Zone, und in eine Zone mit o und q. Ziehen wir nun von dem Durchschnittspuncte von o und q in ζ eine Linie durch C, durch welchen Punct alle Flächen der horizontalen Zone gehen müssen, so finden wir daraus z $= (3\,a : b : \infty c)$.

Unsere 6te Zone geht vom vordern rechten T über t, m, n, s, v nach dem hinteren linken T (Fig. 119 und 118).

Die Fläche t gehört erstens in die vertikale Zone (∞b), dann in eine Zone mit dem rechten T und linken n und in eine mit dem linken T und rechten n. Ziehen wir nun eine Linie parallel b durch die beiden Durchschnittspuncte von n und T (η Fig. 122 b), so erhalten wir $t = (\frac{1}{5}a : \infty b : c)$. Wir finden nehmlich aus den beiden ähnlichen Dreiecken $\alpha'\beta\eta$ und $\varkappa\eta\vartheta$ die Proportion $\beta\eta : \eta\vartheta = \alpha'\beta : \vartheta\varkappa = 1 : 1\frac{1}{2} = 2 : 3$, daraus dann die Proportion $\beta\eta : \eta\vartheta = \beta\lambda : \lambda\gamma = 2 : 3$, also $\beta\lambda = \frac{2}{5}\beta\gamma = \frac{2}{5} . 2a = \frac{4}{5}a$, also $C\lambda = a - \frac{4}{5}a = \frac{1}{5}a$, wie oben.

Die Fläche m (Fig. 119) gehört in unsere I. Kantenzone von P und T, und in unsere 6te, die wir die Kantenzone von t nennen wollen, deren Achse von c nach η läuft, die also das Zeichen $(c ; \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b)$ erhält. Fällen wir nehmlich von η ein Perpendikel auf b, so wird, wie leicht ersichtlich, von b ebenfalls $\frac{1}{5}$ abgeschnitten. Ziehen wir nun eine Linie, welche durch diese 2 Zonenpuncte α und η geht, so finden wir aus den ähnlichen Dreiecken $\eta\lambda\mu$ und $\alpha\beta\mu$ $\lambda\mu : \mu\beta = \eta\lambda : \beta\alpha = \frac{1}{5}b : 1b = 1 : 5$, also ist $\lambda\mu = \frac{1}{6}\lambda\beta = \frac{1}{6} . \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$ und $C\mu = \lambda\mu + C\lambda = \frac{4}{30} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}a$.

Ferner erhalten wir aus den ähnlichen Dreiecken $\delta C\mu$ und $\alpha\beta\mu$, $\delta C : \beta\alpha = C\mu : \mu\beta = 1 : 2$, also $\delta C = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}b$. Unsere Fläche wird daher $m = (\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c)$.

Die Fläche s (Fig. 119) gehört in die Diagonalzone der hintern schiefen Endfläche x und in unsere Kantenzone von t. Ziehen wir nun eine Linie durch diese 2 Zonenpuncte von γ nach η, so erhalten wir $\gamma C : \gamma\lambda = \nu C : \eta\lambda$, d. h. $\frac{5}{5}a : \frac{6}{5}a = \nu C : \frac{1}{5}b$, daraus finden wir $\nu C = \frac{1}{6}b$. Es wird also $s = (a' : \frac{1}{6}b : c)$.

Die Fläche u (Fig. 118) gehört in die Diagonalzone von y und noch in eine Zone mit o, P und T, d. h. die l. Kantenzone von P : T. Ziehen wir nun von $\frac{1}{3}a'$, dem Endpuncte der einen Zonenachse $(\frac{1}{3}a ; c)$ nach α und α' dem Endpuncte der Zonenachse unserer Kantenzone P : T eine

Linie, so ist diese die Projection unserer Fläche u. Aus der Proportion $\pi C : \pi\beta = \varrho C : \alpha\beta$, d. h. $\frac{1}{3}a : \frac{4}{3}a = \varrho C : b$ erhalten wir $\varrho C = \frac{1}{4}b$; daraus $u = (\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c)$.

Die Fläche v (Fig. 118) gehört ebenfalls in die Diagonalzone von y, zugleich in unsere 6te Zone von T über t nach m, unsere Kantenzone von t: T. Ziehen wir nun von π durch η die Linie dieser Fläche, so ist $\pi C : \pi\lambda = \sigma C : \eta\lambda$, d. h. $\frac{1}{3}a : (\frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ $a = \sigma C : \frac{1}{5}b$ oder $5 : 8 = \sigma C : \frac{1}{5}b$, $\sigma C = \frac{1}{8}b$, es wird also $v = (\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c)$.

An der Fig. 120 sehen wir, dass h und i in die Diagonalzone von P, d in eine Zone mit n und T fällt, eine zweite Zone wird uns aus dieser Figur nicht ersichtlich. Wäre noch y und m vorhanden, so würden wir sehen, dass h noch in eine Zone von y mit m gehört, und daraus oder aus einer Messung ihres Winkels gegen n oder P würden wir seinen Werth finden $= (a : \frac{2}{3}b : c)$.

Messen wir den Winkel von d gegen T oder n, so finden wir daraus die Neigung dieser Fläche gegen die Ebene, welche durch die Dimension C und unsere Zonenachse $c\varepsilon$ gelegt wird und aus dem Verhältnisse des Sinus dieser Fläche gegen den Sinus unserer Fläche n bei gleichem Cosinus, nehmlich dem Perpendikel aus C auf die Zonenachse $(c ; \varepsilon)$, können wir den Werth unserer Fläche d berechnen. Unsere Fläche findet sich darnach als $d = (\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c)$. Sie gehört also in die Diagonalzone unserer Fläche t. Messen wir den Winkel von i gegen n oder M, so finden wir daraus den Neigungswinkel gegen die durch a und C gelegte Ebene und daraus mit Hülfe der pag. 230 entwickelten Formel den Werth für b. Es wird $i = (a : \frac{1}{12}b : c)$.

Eben so leicht hätten wir uns auch der allgemeinen pag. 237 etc. entwickelten Formeln zur Berechnung der Zonenverhältnisse und zur Bestimmung der Werthe unserer Flächen bedienen können. Wir wollen für jeden der obenangegebenen Fälle hier ein Beispiel geben.

1) Es sei uns z. B. die Fläche o = (a': $\frac{1}{2}$b : c) und s = (a': $\frac{1}{6}$b : c) gegeben.

Wir suchen nun die Kante, in der sie sich schneiden, d. h. ihre gemeinschaftliche Zonenachse. Setzen wir nun in die Formel

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\alpha(\beta - \beta')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} \text{ und } \beta'' = \frac{\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$ die entsprechenden Werthe ein, so erhalten wir

$$\alpha'' = \frac{1 \cdot (\frac{1}{6} - \frac{1}{2})}{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}} = 1, \ \beta'' = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\ (o)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = o,$$ also unsere Zonenachse ($nc ; \alpha''a + \beta b$) = (c ; a + ob), d. h. sie geht von C nach 1 a.

2) Es seien uns die beiden Zonenpuncte $\eta\varepsilon$ (Taf. X) gegeben, welchen Werth finden wir nun für n?

η ist $= \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b = \alpha a + \beta b$, $\varepsilon = \frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b = \alpha' a + \beta' b$, so erhalten wir aus der hierhergehörigen Formel

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta' - \beta} \text{ und } \beta'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha' + \alpha}$$

$$\alpha'' = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} \quad \beta'' = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$$

$$\alpha'' = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}} = 1 \qquad \beta'' = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{4},$$ also n = (a : $\frac{1}{4}$b : c) wie oben.

3) Wir sagten oben, die Fläche h = (a : $\frac{3}{4}$b : c) gehöre in eine Zone mit m und y. Hätten wir den geschriebenen Werth der Fläche durch eine Messung gefunden und wollten wissen, ob wirklich die Fläche mit m und y in eine Zone gehört, so müsste die Proportion $\alpha : \beta = \alpha' : \beta' - \beta$ gelten. Setzen wir nun die Werthe für α und β etc. ein, so finden wir, dass dies wirklich der Fall ist. Unsere Zonenachse cy endet in y, dieser Punct hat den Werth ($\frac{1}{3}$a + b). Die Proportion wird nun $1 : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} : 1 - \frac{3}{4}$. Ist diese Proportion richtig, so gehört auch unsere Fläche wirklich dieser Zone an. Dies ist auch hier der Fall, denn $1 : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} : 1 - \frac{3}{4}$ giebt $= 4 : 3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 4 : 3$.

In den meisten Fällen werden sich mit Hülfe der graphischen Methode die Werthe der Flächen aus ihren Linien selbst noch schneller berechnen lassen, als dies ohne die Zeichnung mittelst der Formeln allein geschehen kann, die jedoch in den Fällen unersetzbar sind, wo wir keine solche Zeichnung vor uns haben und eine unbekannte Fläche an einem Krystalle nach 2 bekannten Zonen berechnen wollen.

§. 88. *Combination des Epidotes.*

Die (Taf. XI) dargestellten Formen des Epidotes wurden früher in einer solchen Stellung betrachtet, dass die jetzt als schiefe Endflächen anzusehenden Flächen M, T, l u. s. w. als Säulenflächen genommen wurden, die jetzige senkrechte Dimension c früher horizontal gestellt, die Krystalle als senkrechte stehende Säulen aufgefasst wurden. Die wenig befriedigenden Ausdrücke, welche in dieser Stellung die verschiedenen Flächen bekamen, das ausserordentlich verwickelte Verhältniss, in welches sie zu einander bei senkrechter Stellung von M und T traten, veranlasste Weiss, die Krystalle in gewendeter Stellung zu betrachten, und seine Darstellung des Epidotsystemes in dieser Stellung zeigt im Vergleiche mit der früheren so einfache Verhältnisse, giebt so befriedigende Werthe für die verschiedenen Flächen, dass nicht wohl eine andere Auffassung annehmbar erscheinen wird.

Nach ihm werden die Flächen n als die Säulenflächen $(a : b : \infty c)$ angenommen, die miteinander den Winkel von 109°, 28′, 16″, d. h. also denselben Winkel, wie die Flächen des Octaëders gegen einander bilden. Daraus wird das Verhältniss von $a : b = \sqrt{2} : 1$ *).

*) Es ist zu beachten, dass wir hier die grössere Nebenachse, die wir gewöhnlich als b bezeichnet haben, a nennen, dass also hier die Differenz in der grösseren Nebenachse, nicht wie beim Feldspath in der kleineren eingetreten ist.

Aus den schiefen Endflächen findet man das Verhältniss von $a : c = \sqrt{75} : \sqrt{2} = 5\sqrt{3} : \sqrt{2}$, wobei jedoch keine der vorhandenen als $(a : c : \infty b)$, sondern alle als schärfer geneigte, die Fläche $(a : c : \infty b)$ selbst als eine supponirte Fläche angenommen ist. Es verhalten sich also die 3 Dimensionen $a : b : c = \sqrt{150} : \sqrt{75} : \sqrt{4} = 5\sqrt{6} : 5\sqrt{3} : \sqrt{4}$.

Es bestimmt sich nun unmittelbar r als gerade Abstumpfung der scharfen Kante zwischen n und n, als $(a : \infty b : \infty c)$, P als $(\infty a : b : \infty c)$.

Betrachten wir auch hier die verschiedenen Zonen, die sich uns zu erkennen geben, so haben wir

1) die vertikale Zone (∞b) mit den Flächen M, t, l, r, s,
2) die horizontale Zone (∞a) mit den Flächen n, P, r,
3) die Diagonalzone der schiefen Endfläche M mit M, h, o, P,
4) die Diagonalzone der schiefen Endfläche T mit T, u, z, P,
5) die Diagonalzone der schiefen Endfläche l mit l, y, q, P,
6) die Kantenzone von M : n mit M, d, z, q, n, x,
7) die Kantenzone von T : n von n y der einen Seite über T nach d, o und n der entgegengesetzten,
8) die Zone von r nach y, z, o,
9) die Diagonalzone von l mit l, y, q, P.

Nehmen wir eine nicht vorhandene schiefe Endfläche als die $(a : c : \infty b)$ an, woraus wir das Verhältniss von $a : c$ $\sqrt{75} : \sqrt{2}$ fanden, so wird die Neigung von M gegen c $= 63^0, 53', 59''$, für diesen Winkel ist $\sin : \cos = 5\sqrt{3} : 3\sqrt{2} = \sqrt{75} : 3\sqrt{2}$. Die Fläche M hat also bei gleichem Sin. a den 3fachen Cosinus $= 3c$ und wird daher $= (a' : \infty b : 3c)$ oder $= (\frac{1}{3}a' : \infty b : c)$.

Auf dieselbe Weise findet man durch Messung den Winkel $T : r = 129^0, 13', 53{,}5''$ und daraus den Neigungswinkel von T

gegen die Achse c = 50°, 46′, 6,5″, wofür das Verhältniss von sin : cos = $5\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = \sqrt{75} : 5\sqrt{2}$ = a : 5 c; also ist T = ($\frac{1}{5}$a : ∞b : c).

Unsere Fläche d gehört in die Kantenzone von M und n derselben und in die Kantenzone von T und n der entgegengesetzten Seite. Wir haben also die 2 Zonenpuncte α und β (Taf. XI), aus denen wir am einfachsten nach der pag. 241 entwickelten Formel den Werth unserer Fläche finden. Da nehmlich α sowohl, als β in die Projections-Linien unserer Flächen n = (a : b : ∞c) fallen, so ist der Punct α = ($\frac{1}{3}$a′ + $\frac{1}{3}$b) und β = ($\frac{1}{5}$a + $\frac{1}{5}$b). Setzen wir nun diese Werthe von a und b in die pag. 241 unter 3 angeführte Formel, so wird

$$\alpha'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta' - \beta} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}} = 1,$$

$$\beta'' = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha' + \alpha} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{4},$$

also d́ = (a : $\frac{1}{4}$b : c) gleich der Fläche n beim Feldspath. Unsere supponirte Endfläche (a : ∞b : c) würde die Kante zwischen M und T so abstumpfen, dass sie auf d rechts und links parallel Kanten bilden würde, d. h. d würde in die Diagonalzone dieser Endfläche gehören, gerade wie n in die Diagonalzone von P beim Feldspath gehört. Ganz unabhängig von dem Verhältnisse der 3 Dimensionen gehört immer die Fläche (a : $\frac{1}{4}$b : c) in die Diagonalzone der Endfläche (a : c : ∞b) und hat daher von Weiss den Namen „Diagonalfläche" erhalten.

In dieselbe Zone, unsere Kantenzone M : n gehört die Fläche z, zugleich liegt dieselbe aber auch in der Diagonalzone von T. Ziehen wir zwischen den beiden genannten Endpuncten der 2 Zonenachsen α und γ eine gerade Linie, so finden wir am einfachsten aus der Proportion $\gamma C : \gamma\delta = C\delta : \delta\alpha$, d. h. $\frac{1}{5}$a : $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{3}$a = $C\delta$: $\frac{1}{3}$b, $C\delta$ = $\frac{1}{8}$b, also wird z = ($\frac{1}{5}$a : $\frac{1}{8}$b : c) = der Fläche d beim Feldspath.

Unsere Fläche o liegt in der Diagonalzone von M und in der Kantenzone von T mit dem n der entgegengesetzten Seite; als die 2 Zonenachsen-Endpuncte, durch welche diese Fläche o gehen muss, ist uns daher der Punct δ und β gegeben. Wir finden daher aus der Proportion $\delta C : \delta\gamma = \varepsilon C : \beta\gamma$ wie oben $\varepsilon C = \frac{1}{8} b$, d. h. o schneidet von b dasselbe Stück ab wie z und es wird o $= (\frac{1}{3} a' : \frac{1}{8} b : c)$, das Analogon der Fläche v beim Feldspath.

Die Fläche y gehört in die Kantenzone von T : n und in eine Zone mit r und z. Dadurch bestimmen sich uns die Zonenachsenpuncte ε und β' für dieselbe. Aus den ähnlichen Dreiecken $\varepsilon C\zeta$ und $\beta'\gamma\zeta$ finden wir $\varepsilon C : \varepsilon C + \gamma\beta' = C\zeta : C\gamma$, d. h. $\frac{1}{8} : \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = C\zeta : \frac{1}{5}$, daraus wird $C\zeta = \frac{1}{13}$, also y $= (\frac{1}{13} a : \frac{1}{8} b : c)$. Daraus findet sich sogleich die Fläche l, als gerade Abstumpfung der Kante zwischen y rechts und y links, $= (\frac{1}{13} a : \infty b : c)$.

Unsere Fläche q gehört mit y in die Diagonalzone von l, zugleich aber in dieselbe Zone mit n, z, d, M, d. h. unsere Kantenzone n M, dadurch bestimmen sich uns die 2 Zonenpuncte ζ und α für die Fläche q; aus der Proportion $\zeta C : \zeta\delta = \eta C : \alpha\delta$, d. h. $\frac{1}{13} a : \frac{1}{13} + \frac{1}{3} a = \eta C : \frac{1}{3} b = \frac{3}{39} : \frac{16}{39} = \eta : \frac{1}{3} b$ wird $\eta C = \frac{1}{16} b$, also q $= (\frac{1}{13} a : \frac{1}{16} b : c)$.

Die Fläche h gehört in die Diagonalzone von M und in eine Zone, deren Achse parallel den Kanten zwischen h, d, u und r läuft. Dadurch bestimmen sich uns als 2 Zonenpuncte dieser Fläche δ und ϑ. Es wird also h $= (\frac{1}{3} a' : \frac{1}{4} b : c)$ analog der Fläche u beim Feldspath.

Endlich bestimmt sich noch u, als zur Diagonalzone von T und in eine Zone mit h und d gehörend, durch die Zonenpuncte γ und ϑ als die Fläche $(\frac{1}{5} a : \frac{1}{4} b : c)$.

x als zur Kantenzone n : M mit q, z und d gehörig, und zur Diagonalzone der Fläche s, erfordert eine Messung. Messen wir den Winkel von s gegen r, so bestimmt sich daraus s als $(\frac{1}{11} a' : \infty b : c)$. Für x haben wir nun die Zonen-

puncte α' und $\varkappa$, woraus wir x als $(\frac{1}{11} a' : \frac{1}{3} b : c)$, also auch in einer Zone die von dem x der einen Seite über r nach y und z der andern Seite geht, finden, was sich zeigen würde, wenn x auch noch mit r Kanten bildete.

Weiss beobachtete noch eine Fläche zwischen l und T mit dem Werthe $(\frac{1}{5} a : \infty b : c)$.

Ausserdem finden sich noch auf unserer Tafel die von Hany angegebenen Flächen $e = (a : 2b : \infty c)$, die Fläche $k = (\frac{3}{7} a : \infty b : c)$ und $i = (\frac{3}{17} a' : \infty b : c)$, von denen es nach Weiss zweifelhaft ist, ob ihnen wirklich diese Werthe zukommen. Vergleicht man nach den bisher betrachteten Verhältnissen den Epidot und Feldspath miteinander, so zeigt sich trotz der grossen Verschiedenheit, sowohl dem äusseren Ansehen, als dem Entwicklungsgange der Flächenbildung nach, doch manche überraschende Aehnlichkeit, namentlich wenn man sie mit andern zwei- und eingliedrigen Krystallen vergleicht. Bei beiden sind die schiefen Endflächen sehr stark entwickelt, beim Epidot besonders auch der räumlichen Ausdehnung nach die mächtigsten. Während beim Feldspath aber sich kein besonderes Gesetz in der Erscheinung derselben ausspricht, fällt beim Epidot sogleich die Art und Weise auf, in welcher ein Fortschreiten der Werthe derselben zu erkennen ist. Sie gehen nehmlich nach den ungeraden Zahlen vor, und zwar stets so, dass immer abwechselnd am vorderen und hinteren Ende die abwechselnden ungeraden Zahlen die Werthe der vorhandenen Flächen angeben. Geben wir nehmlich allen den gleichen Werth a, so sind die beobachteten Endflächen die, welche von a *) c schneiden in dem Werthe von 3,5, (7?), 9, 11, 13 und zwar fällt 3, 7, 11 auf Flächen der hinteren, 5, 191, 13 auf die der vorderen Seite. Dagegen wurde die Endfläche $(a : \infty b : c)$, die beim Feldspath so mächtig

*) Die Fläche $(a' : 7c : \infty b)$ ist noch nicht wirklich beobachtet worden, die Fläche i, welche man dafür halten möchte, scheint doch nicht diesen Werth zu haben.

und sogar vorn und hinten beobachtet wird und vorn wenigstens immer sehr stark entwickelt sich zeigt, beim Epidot noch nie angetroffen.

Bei Beiden macht sich die hintere schiefe Endfläche ($\frac{1}{3}a'$: ∞b : c) in ihrem Einfluss auf weitere Flächenbildung in hohem Grade und in gleicher Weise geltend. Feldspath wie Epidot haben zu ihrer Diagonalzone gehörend, ganz dieselben Flächen, nehmlich die von $\frac{1}{3}$ a' nach $\frac{1}{4}$b und $\frac{1}{8}$b laufenden Flächen. Ebenso ist bei beiden die vordere schiefe Endfläche ($\frac{1}{5}$a : ∞b : c) vorhanden und von grosser Wichtigkeit. Aus ihrer Diagonalzone erscheint bei beiden die gleiche Fläche ($\frac{1}{5}$a : $\frac{1}{8}$b : c), wozu noch beim Epidot die Fläche ($\frac{1}{5}$a : $\frac{1}{4}$b : c) kommt. Noch wichtiger aber ist die Kantenzone dieser Fläche und der Säulenfläche (a : b : ∞c). Alle Flächen aus dieser Zone zeigen sich bei beiden ganz mit denselben Werthen, die Flächen t, T, v, n dieser Zone beim Feldspath entsprechen ganz genau den Flächen T, n, o, d des Epidots. Der Feldspath zeigt ausserdem aus dieser Zone die noch in die Diagonalzone der hintern schiefen Endfläche x gehörige Fläche s und die zur Hauptkantenzone (P : T) gehörige Fläche m; dem Epidot fehlen diese beiden Flächen, weil ihm auch die Analoga der Flächen P und x fehlen, dagegen hat er eine Fläche y dieser Zone, die zugleich in die Diagonalzone der schiefen Endfläche l = ($\frac{1}{13}$ a : ∞b:c) gehört, welche wiederum dem Feldspath abgeht, dem auch das Analogon der Fläche l fehlt.

Mit dem Verschwinden der schiefen Endfläche (a : ∞b : c), die beim Feldspath so constant und mächtig vorhanden ist, verschwinden beim Epidot auch fast sämmtliche Flächen, die sich aus der Diagonalzone und Kantenzone dieser Fläche P beim Feldspath in so grosser Mannichfaltigkeit finden. Nur die zugleich in andere beim Epidot mächtig entwickelte Zonen gehörige Flächen, welche zugleich auch einer der erwähnten 2 angehören, zeigen sich bei diesem auch, so die Fläche

(a : $\frac{1}{4}$b : c) unsere sg. Diagonalfläche beim Feldspath, die zugleich in die Kantenzone von T : n beim Epidot gehört; die beim Feldspath so wichtige Rhomboidfläche o aus der Kantenzone von P und der Diagonalzone von der gleichgeneigten hintern Fläche x fehlt dem Epidot, da eben analoge Flächen für x und P ihm abgehen.

Die bisher angeführten Verhältnisse, die sich so klar und deutlich mit Hülfe der graphischen Methode entwickeln und noch weiter verfolgen lassen, mögen hinreichen, um ein Beispiel für das characteristische in dem Entwicklungsgange verschiedener Mineralien im zwei- und eingliedrigen Systeme zu geben, namentlich auch um zu zeigen, wie mit dem Auftreten und Verschwinden einer Hauptfläche der ganze Flächenbildungsprocess eine ganz verschiedene Richtung erhält, wie dies am Feldspath und Epidot so deutlich hervortritt in der Ungleichheit der Bildung aller Flächen, die sich bei ersterem auf P und x bezogen, die letzteren fehlen, und in der Uebereinstimmung, die sich augenblicklich in der Ausbildung untergeordneter Flächen zu erkennen giebt, wenn die vorherrschenden Flächen, auf welche sich diese beziehen, in gleicher Weise bei beiden vorhanden sind.

§. 89. *Combination der Hornblende.*

(Taf. IX, Fig. 109, 109 a u. b., Taf. C, Fig. LXXXIX.)

Die gewöhnlichste Form der Krystalle ist die Fig. 109 dargestellte, bestehend ausser den Säulenflächen aus den Flächen r und P, die sämmtlich als Rhomboide erscheinen. Ganz dasselbe wird der Fall am Endspath, wenn die Flächen P und o allein am Ende erscheinen. Zugleich finden wir, dass die Fläche P dieselbe Neigung gegen c hat, wie die Kante x, dass also die Abstumpfung der Kante r : r, die gleich geneigte hintere Endfläche gäbe. Wählen wir nun hier auch P als schiefe Endfläche (a : ∞b : c), so wird r die Rhomboidfläche (a' : $\frac{1}{2}$b : c), und wir können ohne weitere Messung die Werthe

sämmtlicher Flächen aus ihren Zonenverhältnissen finden. Es wird dann z, als zur Diagonalzone von P und in eine Kantenzone von r : M gehörig, das Analogon unserer Diagonalfläche = (a : $\frac{1}{4}$b : c), t, als zur vertikalen Zone und in dieselbe Kantenzone r : M gehörig, wird = ($\frac{1}{3}$a' : ∞b : c) analog der Fläche y das Feldspath, a als zur Diagonalzone von t und in die Kantenzone mit M, r und P gehörig, wird = ($\frac{1}{3}$a' : $\frac{1}{4}$b : c) entsprechend der Fläche u beim Feldspath, i bestimmt sich durch die Zone von r : r : x und von z : M als (a' : $\frac{1}{6}$b : c) = der Fläche s das Feldspath, k durch die Zone z : i : M und M : P : r als ($\frac{1}{3}$a' : $\frac{1}{2}$b : c) = n beim Feldspath, b durch die Zonen M : b : z : r und k : k als ($\frac{1}{3}$a' : $\frac{1}{6}$b : c). Misst man den Winkel von c : c an a = 66°, 25', so findet man daraus c = (a : $\frac{1}{3}$b : ∞c) = z das Feldspath.

Ein- und eingliedriges System.

Triklinoëdrisches System (Naumann). Tetartoprismatisches System (Mohs).

§. 90. In diesem Systeme verschwindet vollends noch die letzte Gleichheit in den verschiedenen Gliedern, indem jetzt auch eine Differenz von rechts und links in den, im vorigen Systeme noch sich gleich verhaltenden Gliedern *b* und b' zu erkennen giebt. Es kommen daher in diesem Systeme nur parallele Flächen vor, jede Fläche erscheint für sich und hat nur an dem entgegengesetzten Ende, die oberen unten, die vorderen hinten die entsprechende. Jedes Glied entwickelt seine eigenen Flächen, unabhängig von den übrigen, wodurch die Krystalle dieses Systemes ein höchst unsymmetrisches Ansehen erhalten. Unter den natürlich vorkommenden Mineralien gehören nur sehr wenige diesem Systeme an, sehr häufig zeigen sich jedoch die künstlichen Präparate, namentlich die aus der organischen Natur, wenn sie krystallisiren, in Formen, welche diesem Systeme

angehören, gleichsam als ob die organische Lebenskraft im Streite mit den die anorganische Natur beherrschenden Gesetzen, auch noch im Unterliegen ihren Gebilden ihr Siegel zum Zeichen ihres Ursprungs aufdrücken wollte, sich kundgebend in derjenigen Form, die den einzelnen Theilen und Gliedern die mit den Krystallisationsgesetzen noch eben verträgliche Freiheit gewährt.

§. 91. Als Grundgestalt dieses Systemes kann man am füglichsten ein schiefwinkliges Parallelipipedum wählen mit dreierlei Flächen, von denen stets die parallelen geometrisch und physikalisch gleich erscheinen.

In diesem Systeme kommen dieselben Arten von Flächen vor, die überhaupt möglich sind, nehmlich solche, die alle 3 Achsen schneiden, solche, die 2 und solche, die nur 1 schneiden.

Was die Stellung oder die Wahl der Achsen betrifft, so ist hier die vollkommenste Freiheit für die Annahme. Da alle Achsen verschieden sind, da jede Fläche nur zweimal erscheint, so lässt sich jede 2 parallele Flächen verbindende Linie als Hauptachse und 2 beliebige andere und sich unter rechten Winkeln schneidende Linien als Nebenachsen ansehen. Jede Fläche kann daher auch als Octaëderfläche, als schiefe Endfläche, als Säulenfläche, als Seitenfläche angesehen werden, da eben jede nur mit ihrer parallelen Fläche erscheint. Man muss daher eben durch Rechnung herauszubringen suchen, welche von den vielen möglichen Annahmen die wahrscheinlichste sei, d. h. unter welchen Voraussetzungen die verschiedenen Flächen die einfachsten Werthe erhalten. Als einen Anhaltspunct für die Wahl der Achsen kann es dienen, wenn man an irgend einer Fläche einen ebenen rechten Winkel gewahr wird, man nimmt dann diese Fläche als Seitenfläche $(a:\infty b:\infty c)$ und die, welche mit ihr die 2 den rechten Winkel bildenden Kanten machen als Säulenfläche und schiefe Endfläche als $(a:mb:\infty c)$ und

$(a : mc : \infty b)$, wobei fernere Untersuchungen ergeben, ob man m als 1 annehmen kann, oder ob man einen andern Werth für dasselbe anzunehmen hat, um einfache Werthe für die verschiedenen andern Flächen zu erhalten. Man findet daher häufig, dass von verschiedenen Krystallographen ein und dieselben Krystalle dieses Systemes ganz verschieden gestellt und betrachtet werden, nicht nur, dass von einem zur Hauptachse gemacht wird, was ein anderer als Nebenachse betrachtet, sondern selbst, dass das ganze Achsensystem gedreht und andere Flächen dadurch an das Ende der Achsen kommen, als bei andern.

Betrachten wir z. B. den Axinit nach Weiss, so müssen wir uns die nach Hany dargestellten Krystalle so gedreht denken, um die Achse c senkrecht zu stellen, dass die Fläche P zur Seitenfläche wird. Es wird dann nach Weiss $a : b : c = \sqrt{24} : \sqrt{24} : 1 = 2\sqrt{6} : 2\sqrt{6} : 1$, der Winkel von $M : P = 90^0$, der von $M : T = 78^0, 28'$. Die verschiedenen Flächen erhalten dann folgende Werthe:

$M = (a : \infty b : \infty c)$ $r = (a' : b : \infty c)$ $l = (a : \frac{1}{10} b : c)$
$P = (b : \infty a : \infty c)$ $z = (a' : 2b : \infty c)$ $s = (\frac{1}{3} a' : \frac{1}{10} b : c)$
$T = (a : c : \infty b)$ $u = (a : \frac{1}{6} b : c)$ $x = (\frac{1}{3} a' : \frac{1}{6} b : c)$
$o = (\frac{1}{5} a' : \frac{1}{2} b' : c')$. Ausser diesen von Hany angegebenen Flächen fand Weiss noch eine Fläche $(a : \frac{1}{2} b : c)$, $(a : \frac{1}{4} b : c)$ $(\frac{1}{3} a' : \frac{1}{4} b : c)$. Die Analogieen, die sich in diesen Werthen der Flächen mit denen des Feldspathes und Epidots kund geben, ist unverkennbar. Auch hier ist es wieder die Diagonalzone einer hinteren schiefen Endfläche $(\frac{1}{3} a' : \infty b : c)$, in welcher hauptsächlich Octaëderflächen, freilich jetzt nur noch zum vierten Theil ausgebildet, vorkommen, und ebenso ist es auf der vordern Seite die Diagonalzone der schiefen Endfläche $(a : \infty b : c)$, in welcher alle vorne vorkommenden Flächen, welche nicht parallel c laufen, angehören. *)

*) cfr. Weiss: Betrachtung des Feldspathsystems in der Stellung einer symmetrischen Säule P T etc., d. h. in ein- und einglie-

Für die Berechnung dienen ganz dieselben Elemente und Formeln wie bei dem ein- und einachsigen und zwei- und eingliedrigen Systeme, von denen es sich nur durch die Verschiedenheit aller Glieder von einander und die dadurch hervorgebrachte Unregelmässigkeit des äusseren Ansehens von den letzteren unterscheidet. Es ist das ein- und eingliedrige System dadurch der gerade Gegensatz von dem regulären. In diesem herrscht die vollkommenste Gleichheit und Gleichartigkeit aller Glieder; im ein- und eingliedrigen die vollkommenste Ungleichartigkeit derselben, die sich denken lässt. Beides hat in Beziehung auf die Stellung und die Wahl der Achsen dieselben Folgen. Die vollkommene Gleichheit derselben macht es ganz gleichgültig, welche derselben wir in die senkrechte Stellung bringen, auf der andern Seite ist dies bei der Differenz nicht nur der ganzen, sondern auch der halben Achse im ein- und eingliedrigen Systeme ebenfalls vollkommen einerlei. Bei ersterem zeigt sich in jeder Stellung die vollkommenste sich stets gleich bleibende Symmetrie, bei letzterem in jeder Stellung eine auffallende Unsymmetrie. Während in allen übrigen Systemen auch im zwei- und eingliedrigen wenigstens noch gleiche Paare von Flächen, also in jeder Stellung wenigstens 2 gleiche Flächen sich zeigen, so sehen wir in diesem Systeme nie 2 gleiche Flächen auf einmal, sondern jede bietet sich dem Anblicke nur einmal dar, wodurch eben die Krystalle dieses Systemes ein so höchst auffallendes und sie vor andern auszeichnendes Ansehen erhalten, und wir müssen den Krystall um 180° drehen, um wieder dieselben Flächen anzutreffen, und wie es für die homoedrischen Krystalle des regulären Systemes ein characteristisches Merkmal war, dass schon nach einer

---

driger Stellung, nach welcher die Rhomboidflächen eine ein- und eingliedrige Säule bilden, da sie gleich geneigt gegen P und T sind, und der Feldspath alle Eigenthümlichkeiten des ein- und eingliedrigen Systemes zeigt.

Drehung um 90° dieselben Flächen und mit Ausnahme des Würfels wenigstens zu je 4 sämmtlich wieder zum Vorschein kommen, so ist es für die Gestalten des ein- und eingliedrigen Systems ebenso characteristisch, dass erst nach einer Drehung um 180° dieselben Flächen und keine öfter als einmal wieder sich zeigt.

Tetrametrische Gestalten.

Es beruht diese Abtheilung auf dem Erscheinen der Begränzungselemente vieler Körper in einer solchen Zahl, dass sie sich nur mit der Annahme von 4 Dimensionen symmetrisch rings um den Mittelpunct des Körpers vertheilen und nur auf 4 solche Dimensionen gleichmässig beziehen lassen. Es wären auch in dieser Abtheilung mehrere verschiedene Systeme denkbar, in der Natur ist nur ein einziges ausgebildet, nehmlich das

drei- und einachsige System.

Sechsgliedriges System (Weiss). Hexagonal-System (Naumann). Rhomboedrisches System (Mohs).

§. 92. Es beruht auf dem Vorhandensein von 4 Dimensionen, deren eine von den andern verschieden ist, und rechtwinklig auf diesen 3 steht, welche unter sich vollkommen gleich sind und miteinander Winkel von 60° bilden. Es hat dieses System daher, was seine Symmetriegesetze betrifft, vollkommene Uebereinstimmung mit dem zwei- und einachsigen Systeme. Bei beiden ist eine Richtung, welche sich vor den übrigen unter sich vollkommen gleichen auszeichnet, nur in Beziehung auf die Zahl der Begränzungselemente und die Winkel, welche sie miteinander bilden, tritt der Unterschied auffallend hervor. Diese richten sich natürlich nach der Zahl der vorhandenen Grunddimensionen. Im zwei- und einachsigen Systeme war es die Zahl 2, in diesem ist es die Zahl 3,

welche allen Zahlenverhältnissen zu Grunde liegt. Das Minimum und die mittlere Zahl und das Maximum von Flächen ist im 2 und 1achsigen $2.2=4$, $2.2.2=8$, $2.2.2.2=16$, im 3 und 1achsigen $2.3=6$, $2.2.3=12$, $2.2.2.3=24$.

Alles, was daher im Allgemeinen über die Erscheinungsweise des zwei- und einachsigen Systemes pag. 157 erwähnt wurde, lässt sich unmittelbar auf das drei- und einachsige anwenden, wenn wir überall statt der 2 gleichen Grunddimensionen die hier dreimal vorkommenden setzen.

Auch in diesem Systeme macht sich die eine verschiedene Achse sogleich als diejenige kenntlich, welche wir zur Hauptachse zu wählen haben.

§. 93. Die Ableitung der verschiedenen Gestalten in diesem Systeme von der einfachsten, der Grundgestalt, folgt ebenfalls ganz denselben Gesetzen, nach welchen die Gestalten des zwei- und einachsigen Systemes aus ihrer Grundgestalt abgeleitet wurden. Als Grundgestalt wählen wir auch in diesem Systeme diejenige, welche entsteht, wenn wir uns eine Fläche durch 1 c, die Hauptachse und je 2 der gleichen Dimensionen a, die miteinander einen Winkel von 60° bilden, diese ebenfalls in der Einheit schneidend, gelegt denken. Es wird auf diese Weise ein Körper entstehen, der dem Octaëder des 2 und 1achsigen Systemes entsprechend von 6 Flächen oben und unten begränzt ist. Seine Kanten laufen ebenfalls wie bei jenem von je einem a zu den beiden benachbarten a und ebenso von jedem a eine nach dem oberen und eine nach dem unteren c. Die Flächen dieses Körpers sind ebenfalls gleichschenklige Dreiecke.

In Beziehung auf die Art und Weise, wie die Flächen gegen die Achsen gelegen sind, giebt es in diesem Systeme, wo 4 Achsen sind, auch 4 verschiedene Unterabtheilungen.

Es kann nehmlich eine Fläche

1) alle 4 Achsen schneiden,

2) 3 Achsen schneiden und der 4ten parallel gehen,

3) 2 Achsen schneiden und den 2 andern parallel gehen,
4) 1 Achse schneiden und den 3 andern parallel gehen.

Von der letzten Art sind nur 2 Flächen möglich, nehmlich die auf der. Hauptachse c oben und unten senkrechten geraden Endflächen, die den 3 Nebenachsen parallel gehen, da c auf diesen allen senkrecht steht.

Von der zweiten Abtheilung sind 2 Arten möglich, nehmlich die eine, nach welcher eine Fläche 2 Nebenachsen und die Hauptachse schneidet, und der 3ten Nebenachse parallel geht, und eine andere, wenn eine Fläche 3 Nebenachsen schneidet und der Hauptachse parallel geht.

Der Raum zwischen je 2 Dimensionen a und c lässt sich wie in dem zwei- und einachsigen Systeme ebenfalls nur in 2 gleiche Theile zertheilen; es sind daher in jedem solchen Raum nur 2 gleiche Flächen möglich, das Maximum von Flächen ist daher 24. Fallen je 2 solcher Flächen zu einer zusammen, so entstehen jedenfalls Körper mit 12 Flächen, die nach der Art und Weise, wie dies geschieht, ein verschiedenes Ansehen haben. Die Hälfte dieser Zahl nehmlich 6 ist das Minimum von Flächen, was in diesem Systeme vorkommen kann; auch von diesen 6flächigen Körpern giebt es verschiedene Arten.

Die nähere Betrachtung dieser Körper beginnen wir am besten mit dem einfachsten, den aus 12 gleichschenkligen Dreiecken bestehenden Körpern, den sg. Dihexaëdern.

Dihexaëder (Weiss) (Taf. XII, Fig. 125) r.

Syn. Sechsgliedrige Doppelpyramiden (Weiss). Hexagonale Pyramiden (Naumann). Gleichschenklige sechsseitige Pyramiden und Dirhomboëder (Mohs). Hexagondodecaëder (Rose).

§. 94. Sie sind von 12 gleichschenkligen Dreiecken begränzt, haben 6 gleiche horizontale Lateralkanten C und 6 obere und 6 untere Endkanten A, 6 2 und 2kantige symmetrische Lateral- und 2 reguläre 6kantige Polecken.

Nach der Art und Weise der Stellung ihrer Flächen kann man wie bei den Octaëdern des zwei- und einachsigen Systemes dreierlei Unterarten unterscheiden.

1) Dihexaëder I. Ordnung, deren Lateralkanten von a nach a laufen. (A Fig. LXXV).

2) Dihexaëder II. Ordnung, deren Lateralkanten senkrecht auf den Dimensionen a stehen (B Fig. LXXV).

3) Dihexaëder III. Ordnung, deren Lateralkanten von a nach ma laufen. (E Fig. LXXV).

Dihexaëder I. Ordnung $\left(ma : \overset{\gamma c}{ma} : \infty a\right)$, mP (Naumann).

§. 95. Gehen wir von dem Dihexaëder aus, das zwei Neben- und die Hauptachse in der Einheit schneidet, so haben wir dieselben Reihen von Dihexaëdern, wie im zwei- und einachsigen Systeme von Octaëdern, nehmlich stumpfere und spitzere, die also ein Stück der Hauptachse kleiner oder grösser als 1 abschneiden. Aus Fig. LXXVI geht unmittelbar hervor, dass eine Fläche, welche 2 einen Winkel von 60^0 miteinander bildende Dimensionen a in gleichen Entfernungen schneidet, dem dritten parallel gehen muss. Das Grunddihexaëder bezeichnen wir daher $\left(a : a \overset{c}{:} \infty a\right)$ die zwischen je 2 a gelegenen, senkrecht auf der Lateralkante der Dihexaëder I. Ordnung stehenden Dimensionen wollen wir auch in diesem Systeme mit s bezeichnen. Wir haben dann für die Dihexaëder I. Ordnung

1) Werthe für s.

Nehmen wir a als 1 an, so wird $s = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$; bei den Dihexaëdern von der Form $\left(ma : \overset{c}{ma} : \infty a\right)$ wird $s' = m s$, bei den spitzeren von der Form $\left(\frac{1}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \infty a\right)$ wird $s' = \frac{1}{m}s$.

2) Neigung der Flächen gegen die Achse c

a) für das Dihexaëder $\left(a : a \overset{c}{:} \infty a\right)$ sin : cos = s : c,

b) für Dihexaëder von der Form $\left(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}\overset{c}{a} : \infty a\right)$

ist sin : cos $= \frac{1}{m}s : c = s : mc$,

c) für Dihexaëder von der Form $\left(ma : m\overset{c}{a} : \infty a\right)$

ist sin : cos $= ms : c$.

3) **Neigung der Flächen gegen die Achsen a.**

Denken wir uns durch die Dimension c und diejenige Dimension s, welche senkrecht steht auf demjenigen a, gegen welches unsere Fläche in seinen Neigungsverhältnissen betrachtet werden soll, eine Ebene gelegt und die Fläche a c a' (Fig. LXXIV) soweit verlängert, bis sie mit dieser Ebene zum Schneiden kommt, so geben uns die Linien Cl : Ca das Verhältniss von sin : cos für den Neigungswinkel der Fläche a c s gegen die Achse a C.

Cl ist aber das Perpendikel in dem rechtwinklichen Dreiecke c C s aus dem rechten Winkel c C s auf die Hypotenuse cs, also $= \frac{cC \cdot Cs}{cs}$; cC ist $= c$, $Cs = 2s$. Unserer Voraussetzung nach ist nehmlich Cs, d. h. die Verlängerung der Dimension s senkrecht auf a C und auf a·b, ebenso a a·s parallel Cb, also ist $ad = db$, $\angle dsa' = bCd$, $\angle Cdb = sda$, also (B 5) $\triangle Cdb = sda$, also $ds = Cd$, $Cs = 2Cd = 2s$. Die Linie cs ist $= \sqrt{(Cc)^2 + (Cs)^2}$, unser Perpendikel

$$Cl = \frac{cC \cdot Cs}{cs} = \frac{c \cdot 2s}{\sqrt{c^2 + 4s^2}} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{c^2 + 3}} \text{*)}$$

$$\sin : \cos = Cl : Ca = \frac{c \cdot 2s}{\sqrt{c^2 + 4s^2}} : a = c \cdot 2s : a\sqrt{c^2 + 4s^2}$$

und im Falle, dass auch $c = 1$ wäre, würde es sein $= 2s : \sqrt{4} = \sqrt{3} : 2 = s : a$, d. h. also wie das Verhältniss der Diagonale zur Seite im gleichseitigen Dreiecke.

Sind es Dihexaëder von der Form $\left(\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}\overset{c}{a} : \infty a\right)$, so

---

*) Da $s^2 = \frac{3}{4}$, ist $4s^2 = 3$.

wird für diese sin : cos $= \frac{c \cdot \frac{2}{m} s}{\sqrt{c^2 + (\frac{2}{m} s)^2}} : \frac{1}{m} a = 2 msc : \sqrt{m^2 c^2 + 4 s^2}$

für Dihexaëder von der Form $\left(ma : \overset{c}{ma} : \infty a\right)$ oder $\left(a : \overset{\frac{1}{m}c}{a} : \infty a\right)$ braucht man nur $\frac{1}{m}c$ statt c zu setzen, da $ma : c = a : \frac{1}{m}c$ und erhält dann

$$\sin : \cos = \frac{1}{m}c \cdot 2s : \frac{\sqrt{c^2 + 4m^2 s^2}}{m} = 2s \cdot c : \sqrt{c^2 + 4m^2 s^2}.$$

4) **Neigung der Flächen in den Lateralkanten gegen einander.**

Der halbe Kantenwinkel ist das Complement des Neigungswinkels der Fläche gegen die Achse c zu 90°, er hat also das umgekehrte Verhältniss für sin : cos, wie jener, daher

für das Dihexaëder $\left(a : \overset{c}{a} : \infty a\right)$ sin : cos $= c : s$

für Dihexaëder der Form $\left(\frac{1}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \infty a\right)$ sin : cos $= mc : s$

für Dihexaëder der Form $\left(ma : \overset{c}{ma} : \infty a\right)$ sin : cos $= c : ms$.

5) **Neigung der Dihexaëderflächen in den Polkanten gegen einander.**

Hier ist für den halben Winkel sin : cos = wie Cs : Ch Fig. LXXIV $= 2s : \frac{a \cdot c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Es ist daher, wenn wir die Werthe vereinfachen, für a 1 und für $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ setzen,

für das Dihexaëder $\left(a : \overset{c}{a} : \infty a\right)$ sin : cos $= \sqrt{3 + 3c^2} : c$

für Dihexaëder der Form $\left(\frac{1}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \infty a\right)$ sin : cos $= \sqrt{3m^2c^2 + 3} : mc$

für Dihexaëder der Form $\left(ma : \overset{c}{ma} : \infty a\right)$ sin : cos $= \sqrt{3c^2 + 3m^2} : c$.

6) **Werthe der Kanten:**

a) die Lateralkanten sind stets = der Dimension a, also $= a, \frac{1}{m}a$ oder ma,

b) die Polkanten sind für die dreierlei Dihexaëder $= \sqrt{c^2 + a^2}$ oder $\sqrt{c^2 + m^2 a^2}$ oder $\frac{\sqrt{m^2c^2 + a^2}}{m}$.

7) **Ebene Winkel.**

Für den ebenen Winkel an der Lateralkante ist sin : cos = wie die Linie von der Mitte der Lateralkante zum Poleck : halben Lateralkante; für den halben ebenen Endspitzenwinkel geben dieselben Linien das Verhältniss von cos : sin.

Es ist daher, wenn wir den Winkel an der Lateralkante α, den $\frac{1}{2}$ Endspitzenwinkel γ nennen,

	für den Winkel α	für Winkel γ
am Grunddihexaëder	sin : cos $= 2\sqrt{c^2+s^2} : 1$	sin : cos $= 1 : 2\sqrt{c^2+s^2}$
an Dihexaëdern $\left(\frac{1}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \infty a\right)$	$2\sqrt{m^2c^2+s^2} : 1$	sin : cos $= 1 : 2\sqrt{m^2c^2+s^2}$
an Dihexaëdern $\left(ma : \overset{c}{ma} : \infty a\right)$	$2\sqrt{c^2+m^2s^2} : m$	sin : cos $= m : 2\sqrt{c^2+m^2s^2}$.

Dihexaëder II. Ordnung.

§. 96. Ihre Lateralkanten laufen wie die Linien B (Fig. LXXV) und sie verhalten sich zu den Dihexaëdern I. Ordnung gerade so, wie die Octaëder II. Ordnung zu den Octaëdern I. Ordnung. Die Lateralkanten stehen senkrecht auf den Dimensionen a und es lässt sich auf dieselbe Weise, wie oben für die Dimension s, welche von der Verlängerung der Lateralkanten des Dihexaëders I. Ordnung in der Entfernung 2 s geschnitten wird, beweisen, dass die Verlängerung dieser Kanten der Dihexaëder II. Ordnung die beiden benachbarten Dimensionen a doppelt so gross abschneiden, als diejenige, auf welcher sie senkrecht stehen, also dass Cf und Cg' = 2 a sind. Das Zeichen für die Dihexaëder II. Ordnung wird daher $\left(2a : \overset{c}{a} : 2a\right)$ $\left(2ma : \overset{c}{m'a} : 2ma\right)$ für die stumpferen, $\left(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a\right)$ für alle spitzeren Dihexaëder.

Wir finden für die Dihexaëder II. Ordnung

1) **den Werth für die Dimension s'**

a) für $\left(2a : \overset{c}{a} : 2a\right)$ $s' = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$ s.

Es ist nehmlich (Fig. LXXV) $Ch = s' = \sqrt{(Ca)^2 + (ah)^2}$; Ca ist $= a = 1$ der Voraussetzung nach, also $Ca = 1 = \sqrt{(Ch)^2 - (ah)^2}$, ah ist aber $= \frac{1}{2} Ch$, also haben wir

$$Ca = \sqrt{(Ch)^2 - (\tfrac{1}{2} Ch)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} Ch^2}$$

$$2 Ca = \sqrt{3 Ch^2} = \sqrt{3 s'^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = s'; \text{ s ist } = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ also } \tfrac{4}{3} s = \frac{4\sqrt{3}}{3.2} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) für $(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma)$ wird $s = \frac{2m}{\sqrt{3}}$

c) für $(\frac{2}{m}a : \overset{c}{a} : \frac{2}{m}a)$ wird $s = \frac{2}{m\sqrt{3}}$.

2) **Neigung der Flächen und Kanten gegen die Hauptachse c.**

	Flächen:	Kanten:
a) für $(2a : \overset{c}{a} : 2a)$	$\sin : \cos = a : c$	$\sin : \cos = 2 : c\sqrt{3}$,
b) für $(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma)$	$\sin : \cos = ma : c$	$\sin : \cos = 2m : c\sqrt{3}$,
c) für $(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a)$	$\sin : \cos = a : mc$	$\sin : \cos = 2 : mc\sqrt{3}$.

3) **Neigung der Flächen gegen die Dimension s'.**

Die Dihexaëder II. Ordnung verhalten sich gegen die Dimensionen s gerade so, wie die Dihexaëder I. Ordnung gegen die Dimensionen a. Wir dürfen daher nur in den für diese gefundenen Formeln a und s' vertauschen, so erhalten wir unmittelbar die Werthe für jene. Es wird daher

a) für $(2a : \overset{c}{a} : 2a)$ $\quad \sin : \cos = 2ac : s' \sqrt{c^2 + 4a^2} = c : \tfrac{2}{3} s \sqrt{c^2 + 4}$

b) für $(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma)$ $\quad \sin : \cos = 2ac : s' \sqrt{c^2 + 4m^2a^2} = c : \tfrac{2}{3} s \sqrt{c^2 + 4m^2}$

c) für $(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a)$ $\quad \sin : \cos = 2amc : s' \sqrt{m^2c^2 + 4a^2} = mc \tfrac{2}{3} s \sqrt{m^2c^2 + 4}$.

4) **Neigung der Flächen in den Lateralkanten gegen einander.**

Der halbe Kantenwinkel ist das Complement des Neigungswinkels der Fläche gegen die Achse c, hat also das umgekehrte Verhältniss von sin : cos wie dieser, also

a) für $(2a : \overset{c}{a} : 2a)$ sin : cos $=$ c : a

b) für $(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma)$ sin : cos $=$ c : ma

c) für $(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a)$ sin : cos $=$ mc : a.

5) **Neigung der Flächen in den Polkanten gegen einander.**

Auch hier wird, wenn man Fig. LXXIV als ein Dihexaëder II. Ordnung ansieht, $Ca = s'$, $Cs = 2a$, also

$$Ch = \frac{s'c}{\sqrt{s'^2 + c^2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}c}{\frac{\sqrt{4+3c^2}}{3}} = \frac{2c}{\sqrt{3c+4}}$$

a) für $(2a : \overset{c}{a} : 2a)$ $\sin : \cos = 2a : \frac{2c}{\sqrt{3c+4}} = \sqrt{3c^2+4} : c$

b) für $(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma)$ $\sin : \cos = 2ma : \frac{2mc}{\sqrt{3c+4m^2}} = \sqrt{3c^2+4m^2} : c$

c) für $(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a)$ $\sin : \cos = \frac{2}{m}a : \frac{2c}{\sqrt{4+3m^2c^2}} = \sqrt{3m^2c^2+4} : mc.$

6) **Werthe der Kanten:**

a) die Lateralkanten sind stets gleich den Dimensionen s, also $= \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2m}{\sqrt{3}}, \frac{2}{m\sqrt{3}}$

b) die Polkanten sind gleich der Quadratwurzel aus dem Quadrate der Dimension c + dem Quadrate der Dimension s, also für unsere dreierlei Dihexaëder II. Ordnung $= \frac{\sqrt{3c^2+4}}{3}, \frac{\sqrt{3c^2+4m^2}}{3}, \frac{\sqrt{3m^2c^2+4}}{3m^2}$.

7) **Ebene Winkel.**

Auch hier giebt uns das Verhältniss von sin : cos für den $\measuredangle\ \alpha$ und cos : sin für Winkel β, die Höhenlinie des Dreieckes: halben Lateralkante

a) für $(2a : \overset{c}{a} : 2a)$ $\sin\alpha : \cos\alpha = \sqrt{3a^2+3c^2} = \cos\beta : \sin\beta,$

b) für $\left(2ma : \overset{c}{ma} : 2ma\right)$ $\sin\alpha : \cos\alpha = \sqrt{3m^2a^2+3c^2} : m = \cos\beta : \sin\beta$,

c) für $\left(\frac{2}{m}a : \overset{c}{\frac{1}{m}a} : \frac{2}{m}a\right)$ „ : „ $= \sqrt{3a^2+3m^2c^2} : 1 =$ „ „

Auch unter den Dihexaëdern findet sich dieselbe Reihenfolge von stumpferen und spitzeren I. Ordnung und II. Ordnung, wie bei den Octaëdern, dass nehmlich immer das nächste stumpfere von einem gegebenen entgegengesetzter Ordnung ist und dieselbe Neigung seiner Flächen gegen die Achse c hat, wie die Kanten des gegebenen.

Es ist also von einem gegebenen I. Ordnung aus

I. Ordnung das II., IV., VI., VIII. { spitzere, stumpfere,

II. Ordnung das I., III., V., VII. { spitzere, stumpfere.

Bei den Octaëdern war jedoch das zweite stumpfere oder spitzere zugleich das zweifach stumpfere oder spitzere, d. h. es hatte bei gleichem Cosinus den zweifachen oder halben Sinus des gegebenen. Das vierte stumpfere war zugleich das vierfach stumpfere. Bei den Dihexaëdern findet diese Art des Fortschreitens nicht Statt. Der Grund hievon liegt in dem Verhältnisse von a : s bei beiden und in der Rechtwinkligkeit der Dimensionen a aufeinander bei dem quadratischen Systeme. Bezeichnen wir in beiden die Dimensionen a und s der auf einanderfolgenden vom spitzesten zum stumpferen fortschreitenden Dihexaëder und Octaëder (Fig. LXVII und LXXVIII) mit denselben Buchstaben, so gelten für beide in gleicher Weise die Proportionen

$$Ch : Cb = Cb : Cd = Cd : Ca = Ca : Ce = Ce : Cc = Cc : Cf.$$

Nehmen wir für beide Cb = 1 an, so werden die Werthe für diese Linien

beim Dihexaëder $\sqrt{\tfrac{3}{4}} : 1 = 1 : \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} : \tfrac{4}{3} = \tfrac{4}{3} : \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{16}{9} = \tfrac{16}{9} : \tfrac{32}{3}$

für beide $= s : a = a : \frac{a^2}{s} = \frac{a^2}{s} : \frac{a^3}{s^2} = \frac{a^3}{s^2} : \frac{a^4}{s^3} = \frac{a^4}{s^3} : \frac{a^5}{s^4} = \frac{a^5}{s^4} : \frac{a^6}{s^5}$

beim Octaëder $\sqrt{\tfrac{1}{2}} : 1 = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2 = 2 : 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} : 4 = 4 : 4\sqrt{2}$

Sechs- und Sechskantner $\left(a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a\right)$ (γc über dem mittleren Glied) Weiss *)

Dihexagonale Pyramiden (mPn) (Naumann). Ungleichschenklige zwölfseitige Pyramide (Mohs). (Taf. XII, Fig. 127).

§. 97. Sie sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken begränzt, indem an die Stelle jedes gleichschenkligen Dreieckes der Dihexaëder 2 ungleichseitige Dreiecke getreten sind, haben dreierlei Kanten und dreierlei Ecken, nehmlich zwölf gleiche zwischen je einer Dimension a und s verlaufende Lateralkanten C, zwölf von den Dimensionen a nach c (A), und ebenso zwölf von den Dimensionen s nach c gehende Polkanten B. Die Ecken an c sind symmetrisch 6 und 6kantig, die Ecken an a und die Ecken an s sind symmetrisch 2 und 2kantig.

1) Werthe der Dimensionen $a = a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a$.

Die Sechs- und Sechskantner schneiden alle 3 Dimensionen a und c, legen wir die Fläche durch 1 a, wobei wir annehmen, dass dieses das grösste Stück von a sei, wobei der Werth von $c = \gamma c$ jeder beliebige sein kann, und das 2te a sei allgemein $\frac{1}{n} a < 1$, d. h. n also stets > 1 und eine rationelle Grösse, so wird das 3te $a = \frac{1}{n-1} a$.

Beweis: Es sei (Fig. LXXVI) AE die Projection unserer Sechs- und Sechskantnerfläche, durch γc gelegt, CA der Voraussetzung nach $= a$, $Ci = \frac{1}{n} a$, so ist Cu das Stück, welches von der dritten Dimension a abgeschnitten wird. Es ist aber (B 6)

$$Cu : AF = Ci : iF, \text{ d. h.}$$

$$Cu : a = \frac{1}{n} a : a - \frac{1}{n} a = 1 : n - 1, \text{ also}$$

$$Cu = \frac{1}{n-1} a \text{ wie oben.}$$

---

*) cfr. Weiss: Theorie der Sechs- und Sechskantner und Drei- und Dreikantner. Abh. d. Berl. Ac. 1822 — 23, pag. 217 etc.

2) **Werthe der 3 Dimensionen** $s = \frac{2s}{n+1} : \frac{2s}{2n-1} : \frac{2s}{n-2}$.

Beweis:

a) In den ähnlichen Dreiecken Ceu und eGA ist

$$Ce : eG = Cu : AG = \frac{1}{n-1} a : \tfrac{1}{2} a = 2 : n-1$$

$$Ce = \frac{2}{n+1} CG = \frac{2s}{n+1} \text{ wie oben.}$$

b) In den ähnlichen Dreiecken Cou und BoA ist

$$Co : oB = Cu : AB = \frac{1}{n-1} a : 2a = 1 : 2n-2$$

$$Co = \frac{1}{2n-1} CB = \frac{2s}{2n-1} \text{ wie oben.}$$

c) In den ähnlichen Dreiecken CuE und DuA ist, da AD = 2s *)

$$CE : AD = Cu : uD = \frac{1}{n-1} a : 1 - \frac{1}{n-1} a = 1 : n-2$$

$$CE : 2s = 1 : n-2$$

$$CE = \frac{2s}{n-2} \text{ wie oben.}$$

Das ausführliche Zeichen für die Dihexaëder wird daher

$$\overset{\gamma c}{\left(a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a \right)}$$
$$\frac{2s}{n+1} : \frac{2s}{2n-1} : \frac{2s}{n-2}$$

Welche Werthe darf n und γ haben?

Für n = 1 erhalten wir $(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a)$, d. h. unser Grunddihexaëder, für n = 2 wird $(a : \overset{\gamma c}{\tfrac{1}{2} a} : a) = (2a : \overset{\gamma c}{a} : 2a)$, also ein Dihexaëder II. Ordnung.

*) Da CD parallel und = AF, so ist △ ClD = FlA, also lD = lA und Cl = lF, also ist Al die Diagonale im gleichseitigen △ auf die Grundlinie = Cg = s.

Es darf also in einem wirklichen Sechs- und Sechskantner n weder 1 noch 2 sein, sonst kann es alle Werthe bis zu ∞ haben, γ kann alle Werthe zwischen o und ∞ haben; wird es o, so entsteht dadurch die gerade Endfläche, wird es ∞, so entsteht daraus die 12seitige Säule.

Von der ganzen Linie AE bleibt nur ein Theil als Lateralkante und zwar derjenige, der dem Mittelpuncte näher liegt, als die anderen von den übrigen Dimensionen a in gleicher Weise verlaufenden Linien. Es ist dieses das Stück i o, also zwischen $\frac{1}{n}$ a und $\frac{2s}{2n-1}$; die übrigen Theile fallen ausserhalb des Raumes, der von anderen Flächen eingeschlossen wird, werden also von diesen, wie Fig. LXXVI zu ersehen, abgeschnitten.

3) **Neigung der Flächen gegen die Achse c.**

Sin : cos = Cr (Fig. LXXVI) : γc; Cr ist das Perpendikel im rechtwinkligen Dreiecke oCA aus dem rechten Winkel auf die Hypotenusa

$$= \frac{Co \,.\, CA}{\sqrt{(Ao)^2}} = \frac{\frac{a \,.\, 2s}{2n-1}}{\frac{\sqrt{(2n-1)^2a^2+4s^2}}{2n-1}} = \frac{2s}{\sqrt{(4n^2-4n+1)a^2+3a^2}} \ ^{*)}$$

$$= \frac{2s}{2\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{s}{\sqrt{n^2-n+1}}, \text{ also}$$

$$\sin : \cos = s : \gamma c\sqrt{n^2-n+1}.$$

4) **Neigung der Flächen gegen die Dimension $\frac{1}{n}$a.**

Das Verhältniss von sin : cos giebt uns hier ein Perpendikel aus C auf die Kante, welche von γc nach CE laufen würde, wenn Ci $= \frac{1}{n}$a der Cosinus ist. Dieses Perpendikel auf cE ist

$$= \frac{\gamma c \,.\, CE}{\sqrt{\gamma^2c^2+(CE)^2}} = \frac{\frac{\gamma c \,.\, 2s}{n-2}}{\sqrt{\gamma^2c^2+\frac{4s^2}{(n-2)^2}}} = \frac{\gamma c \,.\, 2s}{\sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2+4s^2}}$$

*) s ist (pag. 283) $= \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, also $4s^2 = 3a^2$.

also $\sin:\cos = \frac{1}{n}a : \frac{\gamma c \,.\, 2s}{\sqrt{(n-2)^2\gamma c^2+4s^2}} = \sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2+4s^2} : 2n\gamma cs.$

5) **Neigung der Flächen gegen die Dimension** $\frac{2s}{2n-1} = Co.$

Das Verhältniss von sin : cos giebt uns hier das Perpendikel aus C auf die Kante, welche von γc nach A ($= 1\,a$) läuft : Co; dies ist $= \frac{\gamma c \,.\, a}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + a^2}}$, also

$$\sin:\cos = \frac{\gamma c}{\sqrt{\gamma^2c^2+1}} : \frac{2s}{2n-1} = (2n-1)\gamma c : 2s\sqrt{\gamma^2c^2+1}.$$

6) **Neigung der Flächen in den Lateralkanten gegen einander.**

Dieser halbe Kantenwinkel ist das Complement des Neigungswinkels der Fläche gegen die Achse, hat also das umgekehrte Verhältniss von sin : cos, wie jener, d. h. sin : cos $= \gamma c\sqrt{n^2 - n + 1} : s.$

7) **Neigung der Flächen in den Kanten, die von** γc **nach** $\frac{1}{n}a$ **laufen.**

Hier ist das Verhältniss von sin : cos = CE zum Perpendikel aus C auf die Kante von γc nach $\frac{1}{n}a$, also

$$\sin:\cos = \frac{2s}{n-2} : \frac{\frac{1}{n}a \,.\, \gamma c}{\sqrt{\frac{1}{n^2}a^2+\gamma^2c^2}} = 2s\sqrt{a^2+n^2\gamma^2c^2}\ a\,\gamma c(n-2).$$

8) **Neigung der Flächen gegen einander in der Kante von** γc **nach** $\frac{2s}{2n-1}$ **oder Co** (Fig. LXXVI).

Sin : cos ist für den halben Winkel = CA zum Perpendikel aus C auf die Kante, also

$$\sin:\cos = a : \frac{\frac{2s}{2n-1} \,.\, \gamma c}{\sqrt{\frac{4s^2+\gamma^2c^2}{(2n-1)^2}}} = a : \frac{2s\gamma c}{\sqrt{4s^2+(2n-1)^2\gamma^2c^2}}$$

$$= \sqrt{4s^2+(2n-1)^2\gamma^2c^2} : 2s\gamma c.$$

9) **Werthe der Kanten.**

a) **Die Lateralkante** C = io (Fig. LXXVI). Nach der Formel

$$N : M = x(a+b) : y\,a \text{ ist}$$

$$Ai : io = AF\,(Co+oB) : FB\,.\,Co, \text{ d. i.}$$

$$Ai : io = a\,.\,2s : a\,.\,\frac{2s}{2n-1} = 2n-1 : 1$$

$$io = \frac{1}{2n} \text{ von } Ao = \frac{1}{2n}\,.\,\sqrt{a^2+\left(\frac{2s}{2n-1}\right)^2}$$

$$io = \frac{\sqrt{(2n-1)^2 a^2+4s^2}}{(2n-1)2n} = \frac{a\sqrt{n^2-n+1}\,^{*})}{n(2n-1)}.$$

b) **Der Kante** A von γc nach $\frac{1}{n}a$

$$A = \sqrt{\gamma^2 c^2+\tfrac{1}{n}^2 a^2} = \frac{\sqrt{n^2\gamma^2 c^2+a^2}}{n}.$$

c) **Der Kante** B von γc nach $\frac{2s}{2n-1}$

$$B = \sqrt{\frac{\gamma^2 c^2+4s^2}{(2n-1)^2}} = \frac{\sqrt{(2n-1)^2\gamma^2 c^2+4s^2}}{2n-1}.$$

10) **Ebene Winkel des Sechs- und Sechskantners.** Man kann dieselben entweder für sich dadurch berechnen, dass man eine Linie von γc senkrecht auf die Lateralkante zieht, woraus man dann das Verhältniss von sin : cos für die beiden ebenen Winkel an der Lateralkante im Verhältniss dieser Höhenlinie des Dreiecks zu den 2 Theilen der Lateralkante, die sie bildet, findet, oder indem man nach den bekannten trigonometrischen Formeln aus den drei bekannten Seiten des Dreieckes die Winkel berechnet. Man findet daraus

a) für den ebenen Endspitzenwinkel

$$\sin : \cos = a\sqrt{s^2+(n^2-n+1)\gamma^2 c^2} : 2s^2+n(2n-1)\gamma^2 c^2,$$

b) **für den ebenen Winkel an der Dimension** a

$$\sin : \cos = a\sqrt{s^2+(n^2-n+1)\gamma^2 c^2} : a(n-2),$$

---

*) s. pag. 292 unter 3.

c) für den ebenen Winkel an der Dimension s

$$\sin : \cos = (2n - 1)\sqrt{s^2 + (n^2 - n + 1)\gamma^2 c^2} : 2s^2.$$

Wir haben bisher die Werthe für die Dimensionen a und s, für die Kanten von γc nach a und s etc. berechnet, ohne darnach zu fragen, ob die Endkanten nicht auch gleich werden können, d. h. ob unser Sechs- und Sechskantner nicht ein Zwölfkantner, nicht eine reguläre 12seitige Doppelpyramide, die Basis nicht ein reguläres Zwölfeck werden könne?

Sollte dies der Fall sein, so müssten die zweierlei Radien der Basis des Zwölfecks, d. h. unser $\frac{1}{n}$ a und $\frac{2s}{2n-1}$ einander gleich werden. Da $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, wenn $a = 1$, wie wir annehmen, so ist $2s = a\sqrt{3}$. Es müsste also im Falle der Gleichheit der Radien $\frac{a\sqrt{3}}{2n-1} = \frac{1}{n}$ a sein, daraus findet man

$$n\sqrt{3} = 2n - 1 \text{ und } n = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

n bekäme also einen irrationalen Werth in diesem Falle, die reguläre 12seitige Doppelpyramide ist also aus der Krystallographie ausgeschlossen, wie die reguläre 8seitige Doppelpyramide. Aber vertauschen können die beiden Winkel ihre Werthe bei verschiedenen Sechs- und Sechskantnern, so dass der Winkel an a des einen gleich wird dem Winkel an s des andern.

In welchen Fällen tritt diese Vertauschung der Winkel an a und s ein?

Offenbar ist für den Winkel an s Coi (Fig. LXXVI)

$$\sin : \cos = AC : oC = a : \frac{2s}{2n-1} = a : \frac{a\sqrt{3}}{2n-1} = 2n-1 : \sqrt{3},$$

für den Winkel an a, Cio (Fig. LXXVI) ist sin : cos EC : Ci

$$= \frac{2s}{n-2} : \frac{1}{n} a = n\sqrt{3} : n - 2.$$ Soll nun der Winkel an s

gleich dem eines andern an a werden, so muss offenbar gelten $2n' - 1 : \sqrt{3} = n\sqrt{3} : n - 2$, wobei wir n' als unbekannt, n als bekannt ansehen. Daraus findet man

$$3n = (2n' - 1)(n - 2)$$
$$2n = nn' - 2n' + 1$$
$$\frac{2n - 1}{n - 2} = n'.$$

Ist n z. B. 3, so wird $n' = 5$, also bei den Werthen 3 und 5 vertauschen sich die beiden Winkel an a und s. Es ist dann, wenn wir die Werthe für n und n' in obige Proportion einsetzen $9 : \sqrt{3} = 3\sqrt{3} : 1$. Diese Proportion ist richtig, die Formel für n' also ebenfalls richtig. Ebenso wird, wenn wir $n = 5$ annehmen $n' = 3$, indem $\frac{2.5 - 1}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$ ist.

§. 98. Die Dihexaëder und die Sechs- und Sechskantner sind die einzigen möglichen einfachen homoedrischen Körper dieses Systemes. Wie in den übrigen Systemen kommen auch noch senkrecht auf den verschiedenen Dimensionen stehende Flächen vor, d. h. Säulenflächen und Endflächen. Bei den 6seitigen Säulen unterscheidet man wie bei den Dihexaëdern selbst, Säulen I. und II. Ordnung. Sie sind mit andern Worten Dihexaëder, deren $\gamma = \infty$ wird.

1) Säulen I. Ordnung oder I. 6seitige Säule g Taf. XII und XIII $= \left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$. Da, wenn $\gamma = \infty$ wird, die Säulenflächen also nicht gegen c geneigt sind, von stumpferen oder spitzeren nicht die Rede sein kann, so kann man eigentlich nicht von Säulen, welche $\frac{1}{m}a$ oder ma schneiden, sprechen, indem diese Factoren nur das veränderte Verhältniss von dem a : c ausdrückt, welches im Vergleich mit demjenigen, welches a und c in der Einheit schneidet, bei einem anderen Statt findet. Ebenso unterscheidet man daher auch nur eine einzige Form bei den

2) Säulen II. Ordnung oder II. 6seitige Säule c Taf. XII,

a Taf. XIII $= \left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$, deren Flächen senkrecht stehen auf s. Der Winkel, unter welchen sich die Flächen schneiden, ist bei beiden derselbe, der Winkel des regulären Sechsecks $= 120^{0}$.

Sind Dihexaëderflächen und Säulenflächen, die zusammen vorkommen, gleicher Ordnung, so erscheinen die Dihexaëderflächen als Zuspitzungen des Endes gerade aufgesetzt auf die Flächen der Säule, oder diese als gerade Abstumpfungen der Lateralkanten der Dihexaëder g Taf. XII, Fig. 126. Sind beide entgegengesetzter Ordnung, so erscheinen an der Säule die Dihexaëderflächen auf die Kanten derselben aufgesetzt, umgekehrt die Säulenflächen als gerade Abstumpfungen der Lateralecken des Dihexaëders.

3) Zwölfseitige Säulen $\left(a : \frac{1}{n}\overset{\infty c}{a} : \frac{1}{n-1}a\right)$.

Es sind Sechs- und Sechskantner, deren $\gamma = \infty$ geworden ist. Sie haben zweierlei senkrechte Kanten, deren zweierlei Winkel gleich dem Winkel zweier Lateralkanten an a und s sind; sie erscheinen als gerade Abstumpfung der Lateralkanten desjenigen Sechs- und Sechskantners, mit dem sie den gleichen Werth von n haben.

Es können auch regelmässige, gleichkantige 12seitige Säulen vorkommen; dieselben sind jedoch keine einfachen Formen, sondern Combinationen der sechsseitigen Säule I. und II. Ordnung miteinander (Taf. XII, Fig. 136 M und e).

4) Die geraden Endflächen $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$ P und c, (Taf. XII.)

Sie stehen senkrecht auf der Dimension c, gehen daher parallel den 3 Dimensionen a. Sie können nur zu zweien vorkommen und eben so wenig, wie die verschiedenen Säulenflächen für sich allein einen Körper begränzen. Häufig kommen sie mit den Säulenflächen zusammen vor und bilden so ein 6seitiges oder 12seitiges Prisma mit 2 geraden End-

flächen. Gehen sie an Rhomboëdern bis zu den Lateralecken, so bilden sie eine dem Oblongoctaëder entsprechende Gestalt (Taf. XIII, Fig. 150.)

Hemiedrische Formen.

§. 99. Die Hälftflächner dieses Systemes sind ausserordentlich mannichfach und in allen denkbaren Arten des Hemiedrischwerdens ausgebildet und kommen so häufig, wie nicht leicht in einem anderen Systeme vor. Auch in diesem kann man der äusseren Erscheinung nach unterscheiden

1) parallelflächig,

2) geneigtflächig hemiedrische Gestalten.

Erstere kommen selbst häufiger vor, als die homoedrischen Gestalten, und zwar sowohl untergeordnet an diesen, als auch für sich; die letzteren sind seltener; für sich allein Körper bildend sind sie noch nicht beobachtet worden, immer kommen sie untergeordnet an anderen vor. Sowohl die parallelflächigen, als die geneigtflächigen Gestalten kann man sich aus dem abwechselnden Wachsen und Verschwinden der Hälfte der Flächen oder der Flächenpaare der Dihexaëder oder Sechs- und Sechskantner entstanden denken. Je nachdem dieses so geschieht, dass die paralleleri Flächen von wachsenden Flächen ebenfalls dadurch zu wachsenden werden, oder zu verschwindenden, entstehen dadurch parallelflächige oder geneigtflächige Gestalten.

Parallelflächig hemiedrische Gestalten.

§. 100. Hälftflächner der Dihexaëder. Rhomboëder $\frac{1}{2}\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$ und $\frac{1}{2}\left(a' : \overset{c\gamma}{a'} : \infty a\right)$ $\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$ (Naumann). Rautenflach (v. Raumer). (Taf. XIII, Fig. 138, 139, 158.)

Sie sind von 6 Rhomben umschlossene Gestalten, haben 2 reguläre 3kantige Polecken, 4 unregelmässige 3kantige

(2 und 1winklige) Ecken, und 12 gleichlange Kanten, 3 und 3 an den Polecken zusammenstossende und 6 Lateralkanten. Die Dimension c verbindet die beiden Polecke, die Dimensionen a die Mittelpuncte der gegenüberliegenden Lateralkanten.

Der Schnitt durch die Mitte der Lateralkanten ist ein reguläres Sechseck und gleich der Basis des Dihexaëders, aus welchem das Rhomboëder entstanden ist. Die Schnitte durch die Lateralkanten an andern Puncten sind symmetrische 3 und 3kantige Sechsecke mit gleichen Winkeln, die durch die Lateralecken, oder zwischen den Lateral- und Polecken geführten auf c senkrechten Schnitte sind gleichseitige Dreiecke.

Zieht man von den Polecken Linien nach den Mittelpuncten der Lateralkanten, so beschreiben diese das Dihexaëder, aus welchem das Rhomboëder entstanden ist. Der Schnitt durch diese Linien, d. h. also der durch die Dimensionen c und a bleibt — wie bei dem Dihexaëder — ein Rhombus, der durch c und s, d. h. durch je 2 Kanten und 2 Flächendiagonalen des Rhomboëders ist ein Rhomboid.

Die Rhomboëder entstehen aus den Dihexaëdern, indem an der obern und untern Hälfte die abwechselnden Flächen wachsen und verschwinden und zwar oben und unten diejenigen, welche an den abwechselnden Lateralkanten liegen. Es sei Fig. LXXIX der Durchschnitt durch die Lateralkanten des Dihexaëders, so wachsen, wenn oben die Flächen an den ausgezogenen Kanten rv wachsen, unten die an den punctirten Linien r v. Die 3 oben wachsenden Flächen werden Kanten bilden, welche über der Mitte der verschwindenden Flächen liegen, und von c nach f laufen. Aus pag. 291 wissen wir, dass $Cf = CB$ der Fig. LXXVI $= 2s$ ist. Die neuen Kanten laufen also von c nach 2s. Sie bleiben aber nicht in dieser ganzen Ausdehnung an den Rhomboëdern, sondern werden von der an der untern Hälfte wachsenden Fläche in einem bestimmten Verhältnisse geschnitten.

Es sei Fig. LXXX ein Durchschnitt durch die Dimension c und s des Dihexaëders und seines Rhomboëders, wo die Buchstaben denen in Fig. LXXIX entsprechen. Die neue Kante cf und c'f' läuft von c und c' nach 2s, die wachsenden Flächen, deren Diagonalen cs' und c's sind, dehnen sich über die an der entgegengesetzten Hälfte verschwindenden Flächen aus, und schneiden in d und l die Polkanten. Wir finden nun die verschiedenen Werthe der Begränzungselemente der Rhomboëder auf folgende Weise.

1) Die Kanten cl.

Cf ist $= 2s$, also $cf = \sqrt{(cC)^2 + (Cf)^2} = \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2}$.
Ziehen wir nun c'f, so ist nach der Formel

$x : y = Na : M(a + b)$,

$fl : cl = fs . Cc' : Cs\ (cc') = s . \gamma c : s . 2\gamma c = 1 : 2$, also

$cl = \frac{2}{3} cf = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma^2 c^2 + 3}.$

2) Die Pol- oder Höhendiagonale cd oder c'l der Fläche des Rhomboëders.

Ziehen wir al parallel Cf, so ist

$Ca : cC = fl : fc = 1 : 3$, also $Ca = \frac{1}{3} Cc = \frac{1}{3}\gamma c$.

Nun ist $c's = \sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2}$, ferner

$c's : c'l = cC : ca = \gamma c : \frac{4}{3}\gamma c$

$cl = \frac{4}{3} c's = \frac{4}{3}\sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2}.$

3) Das Verhältniss der Stücke der Hauptachse, welche durch diejenigen Schnitte, welche durch die 3 oberen und 3 unteren Lateralecken senkrecht auf c geführt werden.

$ca : ab : bc' = 1 : 1 : 1$,

aC fanden wir ist $= \frac{1}{3} Cc = \frac{1}{3}\gamma c$, also $ca = \frac{2}{3}\gamma c$, ebenso ist aber auch $Cb = \frac{1}{3} Cc' = \frac{1}{3}\gamma c$ und $c'b = \frac{2}{3}\gamma c$, folglich $aC + Cb = \frac{1}{3}\gamma c + \frac{1}{3}\gamma c = \frac{2}{3}\gamma c$, d. h. $ca : ab : bc' = \frac{2}{3}\gamma c : \frac{2}{3}\gamma c : \frac{2}{3}\gamma c = 1 : 1 : 1$.

4) Neigung der Fläche gegen die Achse c.

Sie ist unverändert, also wie die des Dihexaëders

$\sin : \cos = s : c.$

5) **Neigung der Endkanten gegen c,**

hier ist sin : cos $= Cf : cC$ (Fig. LXXX) $= 2s : \gamma c$.

Die Endkante hat also bei gleichem Cosinus den doppelten Sinus, oder bei gleichem Sinus den halben Cosinus des Neigungswinkels der Fläche gegen γc.

6) **Neigung der Flächen in den Endkanten gegen einander.**

Denken wir uns den Winkel der Kante durch eine Ebene halbirt, welche durch unsere von γc, welches senkrecht auf C (Fig. LXXIX) ist, nach $f = 2s$ gehende Kante, durch die Dimension c und die Linie Cf geht, so ist sin : cos dieses halben Winkels $= rC$: Perpendikel aus C auf unsere Kante, die von γc nach f geht, also sin : cos $= a : \frac{\gamma c \cdot 2s}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2}}$

$$= a\sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2} : \gamma c \cdot 2s \text{ für } \gamma = 1 \text{ und } a = 1$$
$$= \sqrt{c^2 + 3} : c\sqrt{3}.$$

7) **Neigungswinkel der Flächen in den Lateralkanten gegen einander.**

Diese Kanten entstehen dadurch, dass die an ein und derselben Dimension a anliegenden, oben links unten rechts gelegenen Flächen wachsen und sich in einer Kante schneiden, deren Mittelpunct die Dimension a ist. Der halbe Winkel, den hier die beiden Flächen miteinander bilden, ist der Winkel, den die Flächen des Dihexaëders mit der Dimension a bilden. Wir hatten hiefür

sin : cos $= \gamma c \cdot 2s : \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2}$. Es ist das Complement zu dem vorigen Winkel.

8) **Ebene Winkel der Rhomboëder.**

Ziehen wir die Diagonalen in den Rhomben, so geben uns die Hälften derselben das Verhältniss von sin : cos und cos : sin für die Hälften der zweierlei Winkel des Rhombus. Die Hälfte der Poldiagonale, die von c nach d geht (Fig. LXXX), ist $= ct = \frac{2}{3}cs' = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2}$ und die ganze $= \frac{4}{3}\sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2}$.

Denken wir uns einen Schnitt durch die 3 oberen Lateralecken geführt, so geht derselbe durch die 3 die Lateralecken verbindenden Diagonalen und durch die Mitte der Diagonale cd durch t. Es wird durch diese Diagonalen ein gleichseitiges Dreieck gebildet, dessen Diagonale = tl ist. Da aber im gleichseitigen Dreiecke die Seite gleich $\sqrt{\frac{4}{3}} \times$ die Diagonale ist, *) so ist unsere gesuchte Querdiagonale die Seite des gleichseitigen Dreieckes $= \sqrt{\frac{4}{3}}\, tl$. Es ist aber

$$tl : s'f = ca \,.\, cC = 2 : 3 = \tfrac{2}{3}\, s'f = \tfrac{2}{3} \,.\, 3s = 2s,$$

also die Diagonale $= \sqrt{\frac{4}{3}} \,.\, 2s = \sqrt{\frac{4}{3}} \,.\, \sqrt{3} = 2,$
die halbe ist also = 1, wenn $\gamma = 1$ angenommen wird.

Ganz dasselbe erhalten wir, wenn wir die Diagonale auf die Weise berechnen, dass wir ihre Hälfte als die eine Kathete betrachten, im rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse die Polkante, dessen andere Kathete die $\frac{1}{2}$ Diagonale $cd = ct$ ist. Wir bekommen dann

$$D = \sqrt{(cl)^2 - (ct)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{9} \,.\, (\gamma^2 c^2 + 4 s^2) - \tfrac{4}{9} \,.\, (\gamma^2 c^2 + s^2)}$$
$$= \tfrac{2}{3} \sqrt{3 s^2} = \tfrac{2}{3} \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{3}{2} = 1,$$

also wird die ganze ebenfalls = 2.

Wir haben daher für den halben ebenen Endspitzenwinkel α die halbe Querdiagonale : halben Poldiagonale =

$$\sin : \cos = \tfrac{2}{3} \sqrt{3 s^2} : \tfrac{2}{3} \sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2} = s\sqrt{3} : \sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2},$$

für den halben Lateraleckenwinkel β das umgekehrte

$$\sin : \cos = tc : lt = \sqrt{\gamma^2 c^2 + s^2} : s\sqrt{3}.$$

§. 101. Auch bei den Rhomboëdern muss man Rhomboëder I. und II. Ordnung unterscheiden. Sie unterscheiden sich gerade so, wie die Dihexaëder und wie die Octaëder I. und II. Ordnung, indem die Flächen der einen senkrecht auf der durch die Kanten und die Dimension c gelegten Ebene der Rhomboëder entgegengesetzter Ordnung stehen; laufen z. B. die Kanten der Rhomboëder I. Ordnung von γc nach den 3 abwechselnden Dimensionen s, so laufen die der II. Ord-

*) s. pag. 105.

nung nach den 3 andern Dimensionen s, so dass die zweierlei Ordnungen eine Lage haben, wie die 2 Dreiecke f f f und f′ f′ f′ (Fig. LXXIX), wovon das eine mit den ausgezogenen, das andere mit den punctirten Linien gezeichnet ist.

Sie unterscheiden sich daher nur durch ihre Lage von einander. In Beziehung auf die Werthe ihrer Begränzungselemente ändert sich in den oben entwickelten Formeln nichts, da es auch für diese die Dimensionen s sind, welche die Werthe derselben bestimmen, gerade so, wie für die andern, welche entgegengesetzter Ordnung sind.

Sie verhalten sich zwar, wie Dihexaëder I. und II. Ordnung zu einander; man muss sich jedoch vor der Vorstellung hüten, als ob die Rhomboëder I. Ordnung aus Dihexaëdern I. Ordnung und Rhomboëder II. Ordnung aus Dihexaëdern I. Ordnung entstünden.

Im Gegentheil entstehen aus ein und demselben Dihexaëder immer ein Rhomboëder I. und ein gleiches II. Ordnung, die man in diesem Falle als Rhomboëder und Gegenrhomboëder, oder als rechtes und linkes Rhomboëder bezeichnet. So stellen die Buchstaben f f f und f′ f′ f′ das Rhomboëder I. und II. Ordnung, welche aus dem Dihexaëder I. Ordnung r v, r v, r v entstanden sind, g g g und h h h dagegen die Projection des Rhomboëders I. und des Rhomboëders II. Ordnung, welche aus dem Dihexaëder II. Ordnung s s s s s s entstanden sind.

Für diese Rhomboëder wären es die Dimensionen a, welche uns zur Bestimmung der Werthe ihrer Begränzungselemente und ihrer Winkelverhältnisse dienen würden, wenn sie zugleich mit den andern, aus einem Dihexaëder entgegengesetzter Ordnung entstandenen vorkommen würden. Da dieses aber nicht der Fall ist, so brauchen wir darauf weiter keine Rücksicht zu nehmen und können alle Rhomboëder als aus Dihexaëdern I. Ordnung entstanden für die Berechnung annehmen, uns für alle der oben entwickelten Formeln bedienen.

Um die beiden verschiedenen Ordnungen von Rhomboëdern von einander zu unterscheiden, bedient man sich, da jedes Rhomboëder mit seinem Gegenrhomboëder entgegengesetzter Ordnung gleiche Werthe hat, der Accente für die Rhomboëder II. Ordnung und bezeichnet allgemein ein Rhomboëder mit seinem Gegenrhomboëder als

$$\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right) \text{ und } {}'\left(a' : \overset{\gamma c}{a'} : \infty a\right).$$

Auch bei den Rhomboëdern kommen viele vor, die unter sich in demselben Verhältnisse stehen, wie gewisse Octaëder und Dihexaëder zu einander, und Reihen bilden, in welchen immer das nächste stumpfere entgegengesetzter Ordnung ist und dieselbe Neigung seiner Fläche gegen die Achse hat, wie die Polkante seines ersten spitzeren gegen dieselbe. Bei gleichem Cosinus γc verhalten sich für diese Reihen die Sinuse der Neigungswinkel für die Reihe von Rhomboëdern d, a, e, c Fig. LXXXI, $Cd : Ca = Ca : Ce = Ce : Cc = Cc : Cf$ etc., d. h. es gelten dieselben Proportionen, die wir auch für Dihexaëder und Quadratoctaëder pag. 289 gültig gefunden haben. Nur steigen hier die Zahlenwerthe in einem noch grösseren Verhältnisse, als bei jenen. Es ist nehmlich

$$Cd : Ca : Ce : Cc : Cf = 1 : 2 : 4 : 8 : 16.$$

Da im gleichseitigen Dreiecke die Diagonalen im Mittelpuncte C sich so theilen, dass die beiden Stücke jeder sich verhalten wie $1 : 2 = Cd : Ca$ u. s. w.

Es verhalten sich also diese Linien der Körper der Dihexaëder : Quadratoctaëder : Rhomboëder $= \sqrt{\tfrac{4}{3}} : \sqrt{2} : \sqrt{4} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{6}$. Rhomboëder, die nicht in diese Reihe gehören, kommen ebenfalls häufig vor; man muss auch bei ihnen jedoch durch die Accente ausdrücken, welcher Ordnung sie angehören. So kann z. B. ein Rhomboëder vorkommen, das bei gleichem Cosinus γc den fünffachen Sinus von dem des Grundrhomboëders $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$ hat, und kann ebensowohl I. als II. Ordnung sein, d. h. wie die Linien

g g g oder wie die i i i (Fig. LXXXI) gegen das Grundrhomboëder gelegen sein; wovon das erstere $\left(5a : \overset{c}{5a} : \infty a\right)$, das letztere $\left(5a' : \overset{c}{5a'} : \infty a\right)$ geschrieben werden müsste. Oft giebt ein solches Rhomboëder wieder das Grundrhomboëder für eine ähnliche Reihe, wie die d, a, e, c ab, so dass also das erste, zweite u. s. f. stumpfere oder spitzere von diesem vorkommt. Man braucht dann nur dieses anzugeben, um die Werthe für die übrigen Rhomboëder dieser Reihe zu finden. Das erste stumpfere des Rhomboëders $\left(5a : \overset{c}{5a} : \infty a\right)$ ist das zehnfach stumpfere des Grundrhomboëders, nehmlich $\left(10a' : \overset{c}{10a'} : \infty a\right)$ und entgegengesetzter Ordnung, sein erstes spitzeres wäre $\left(\frac{5}{2}a' : \overset{c}{\frac{5}{2}a'} : \infty a\right)$ u. s. f.

Bei dem Kalkspath kommen ausser der Hauptreihe, die vom Grundrhomboëder ausgeht, mehrere solche Nebenreihen vor.

§. 102. Hälftflächner der Sechs- und Sechskantner.

Drei- und Dreikantner $\frac{1}{2}\left(a : \frac{1}{n}\overset{\gamma c}{a} : \frac{1}{n-1}a\right)$ und $\frac{1}{2}\left(a' : \frac{1}{n}\overset{\gamma c}{a'} : \frac{1}{n-1}a'\right)$ (Weiss). Skalenoëder $+\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ (Naumann).

Sie entstehen auf dieselbe Weise aus den Sechs- und Sechskantnern, wie die Rhomboëder aus den Dihexaëdern, nehmlich durch abwechselndes Wachsen und Schwinden je zweier zwischen 2 Dimensionen a gelegener Flächen, und zwar der oben und unten nicht an den Lateralkanten zusammenstossenden Flächen. So entstehen ebenfalls aus einem Sechs- und Sechskantner zweierlei Drei- und Dreikantner, die man ebenfalls als solche I. und II. Ordnung unterschieden hat und die gegen ihren gemeinsamen Sechs- und Sechs-

kantner eine Lage haben, wie Fig. LXXVIII der Drei- und Dreikantner bt, bt, bt und der d, d, d.

Wie aus der Figur hervorgeht, bleiben die abwechselnden Endkanten an den Dimensionen s, die an a schwinden alle, die an den übrigen 3 Dimensionen s in b oder d verschwinden, indem sich die wachsenden Flächen über dieselben ausdehnen. Die bleibenden Kanten von γc nach s verlängern sich mit ihren wachsenden Flächen, indem die oberen sich über die unten schwindenden, oder die unten wachsenden sich über die oberen schwindenden Paare ausdehnen. Die von den Seiten derselben unteren oder oberen Hälfte her über die verschwindenden Paare wachsenden Flächen werden mit den von oben oder im andern Falle von unten herkommenden, ebenfalls wachsenden Flächen sich schneiden; da die neugebildete Kante sich ebenfalls in der durch γc und s gelegten Ebene bildet, so wird die neue Kante mit der bleibenden wachsenden zusammenstossen. Die alten Lateralkanten verschwinden sämmtlich, da an keiner 2 wachsende Flächen liegen, dagegen bilden sich neue zwischen den oben und unten an ein und derselben Dimension a wachsenden und sich also schneidenden Flächen. Da 6 obere mit 6 unteren Flächen zum Durchschnitt kommen, entstehen auf diese Weise 6 abwechselnd nach den oben wachsenden und schwindenden Flächen ab- und aufsteigende Kanten, von denen der Name Skalenoëder hergenommen ist. Wenn nehmlich die an der Lateralkante tr (Fig. LXXVIII) anliegende obere Fläche wächst, so schwindet die an derselben Lateralkante unten anliegende Fläche, die an rv anliegende obere Fläche schwindet dagegen und es wächst die untere Fläche derselben Seite. Der Punct r, in welchem diese 4 Flächen zusammenstossen, bleibt unverändert, indem aber die Fläche an tr nach unten und gegen b über v hin wächst, ebensoviel als die an rv nach oben und unten über r hin nach d zu, bilden sie miteinander eine Kante die in dem Theil von r

gegen die Seite nach d hin mit der hinabwachsenden Fläche hinab-, in dem andern nach v hin mit der heraufwachsenden Fläche in derselben Ausdehnung heraufwächst.

So kommt jede Fläche mit 3 andern zum Durchschnitt und es entsteht so ein Körper, der 12 Flächen, 18 Kanten und 8 Ecken hat (Taf. XIII, Fig. 147). Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke, die Kanten dreierlei, nehmlich oben und unten 3 längere B' und 3 kürzere Polkanten A' und 6 Lateralkanten C'.

Die Ecken sind zweierlei, 2 3 und 3kantige symmetrische Polecken, und 6 irreguläre 2, 1 und 1kantige Lateralecken.

Die Dimensionen c verbinden die beiden Polecken, die Dimensionen a bleiben dieselben wie bei dem Sechs- und Sechskantner, aus dem der Drei- und Dreikantner entstand, und fallen in die Mitten der Lateralkanten, die Dimensionen s endigen an bestimmten Puncten der Polkanten.

Der Schnitt durch den Mittelpunct des Körpers senkrecht auf c ist derselbe, wie bei dem Sechs- und Sechskantner, die demselben parallelen zwischen dem Mittelpuncte und dem Ende von c sind gleichkantige, symmetrische, zweierlei Winkel habende Sechsecke (Fig. LXXVIII), die Schnitte durch c und a gleich denen des Sechs- und Sechskantners Rhomben, die durch c und s Rhomboide.

Wir suchen vor allem die Werthe der Kanten des Drei- und Dreikantners.

1) Kante A', die kürzere Polkante.

Diese Kante bildet sich über den verschwindenden Flächen des Sechs- und Sechskantners, indem die beiden benachbarten wachsenden Flächen in der durch die Dimension s der schwindenden Flächen und c gelegten Ebene sich schneiden.

Welcher Punct ist dies? Es sei Fig. LXXVI oi eine wachsende Fläche, so schwinden die Flächen zwischen i und g und die Fläche fg wächst wieder, die Flächen fg und oi

schneiden sich aber in e, wofür wir den Werth $\frac{2s}{n+1}$ gefunden hatten. Fig. LXXXIII sei cvc's der Durchschnitt des Sechs- und Sechskantners durch c und s $Co = \frac{2s}{2n-1}$ und cv die schwindende Kante von $\frac{2s}{2n-1}$ nach γc, über der sich die neue Kante cb bildet, die von γc nach $\frac{2s}{n+1} = Cb$ geht.

Ziehen wir nun c'b, so ist nach der Formel

$$x : y = Na : M(a+b)$$

$$bl:lc = bv.c'C:vC(c'C+Cc) = \left(\frac{2s}{n+1} - \frac{2s}{2n-1}\right)\gamma c : \frac{2s}{2n-1} . 2\gamma c$$

$$= \frac{2s(2n-1)-2s(n+1)}{(n+1)(2n-1)} : \frac{4s(n+1)}{(n+1)(2n-1)} = n-2:2n+2$$

$$lc = \frac{2n+2}{(2n+2)+(n-2)} bc = \frac{2(n+1)}{3n}\sqrt{\gamma^2 c^2 + \frac{4s^2}{(n+1)^2}}$$

$$A' = lc = \frac{2\sqrt{(n+1)^2\gamma^2 c^2 + 4s^2}}{3n}.$$

2) Die längere Polkante B'.

Es ist $c'C : c'h = c'v : c'l$ (Fig. LXXXIII).

Nun verhält sich $c'C : c'h = cC : Ch + cC$.

Es ist aber $ch : hC : cC = cl : lb : cb = n-2 : 2n+2 : 3n$ (pag. 308. 1).

Daraus wird $c'v : c'l = 3n : 4n-2$.

$$c'v \text{ ist } = \sqrt{\gamma^2 c^2 + \frac{4s^2}{(2n-1)^2}}, \text{ also } c'l = \frac{4n-2}{3n} \cdot \frac{\sqrt{(2n-1)^2\gamma^2 c^2 + 4s^2}}{2n-1}$$

$$B' = c'l = \frac{2\sqrt{(2n-1)^2\gamma^2 c^2 + 4s^2}}{3n}.$$

3) Die Lateralkanten C'

Sie laufen gerade wie die Lateralkanten eines Rhomboëders, das von dem Drei- und Dreikantner umschlossen würde, wie Fig. LXXXII zeigt, und die Lateralkanten und Lateralecken mit demselben gemeinschaftlich hat, in unserem Durchschnitte

(Fig. LXXXIII), also die Ecken i und l. Zwei senkrecht auf der Hauptachse stehende, durch die obern und untern Lateralecken des Rhomboëders geführte Schnitte theilen, wie wir wissen, die Hauptachse im Verhältniss von ca : ab : bc' (Fig. LXXX) = 1 : 1 : 1, und die halbe cC im Verhältniss von ca : aC = 2 : 1. Daraus finden wir γc des eingeschlossenen Rhomboëders, indem sich seine Theile γh : hC verhalten müssen wie 2 : 1, es wird also γc des eingeschlossenen Rhomboëders Cγ = 3 Ch; Ch finden wir aus der Proportion (pag. 308)

$$\mathrm{Ch : hc : Cc = bl : lc : bc} = n-2 : 2(n+1) : 3n$$

$$\mathrm{Ch} = \frac{(n-2)}{3n}\gamma c,$$

$$\text{also } \mathrm{C}\gamma = 3\,\mathrm{Ch} = \frac{(n-2)\gamma c}{n}.$$

Die Kante des Rhomboëders, die zugleich unsere Lateralkante ist, lγ ist $= \sqrt{(\gamma h)^2 + (lh)^2}$

$$\gamma h \text{ ist } = 2\,\mathrm{Ch} = \frac{2(n-2)\gamma c}{3n},$$ für lh finden wir aus der Proportion ch : cC = lh : bC, d. h.

$$2(n+1) : 3n = lh : \frac{2s}{n+1}$$

$$lh = \frac{4s}{3n},$$

$$\text{also } l\gamma = C' = \sqrt{(\gamma h)^2 + (lh)^2} = \frac{\sqrt{4(n-2)^2\gamma^2c^2 + (4s)^2}}{3n}$$

$$C' = \frac{2\sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2 + 4s^2}}{3n}.$$

Es verhalten sich also die dreierlei Kanten des Drei- und Dreikantners

$$A' : B' : C' = \frac{2\sqrt{(n+1)^2\gamma^2c^2+4s^2}}{3n} : \frac{2\sqrt{(2n-1)^2\gamma^2c^2+4s^2}}{3n} : \frac{2\sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2+4s^2}}{3n}$$

$$= \sqrt{(n+1)^2\gamma^2c^2+4s^2} : \sqrt{(2n-1)^2\gamma^2c^2+4s^2} : \sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2+4s^2}.$$

Es sind also nur die bekannten Grössen unserer Dimensionen s der Sechs- und Sechskantner $n+1$, $2n-1$, $n-2$, welche in den Werthen der dreierlei Kanten sich finden, und dieselben bestimmen, indem die übrigen Factoren bei allen 3 gleich sind.

4) Neigung der Flächen gegen die Achsen.

Sie bleiben unverändert dieselben, wie an dem Sechs- und Sechskantner, da die vorhandenen Flächen nur die grösser gewordene Hälfte der Flächen jenes sind, in ihren Neigungsverhältnissen daher keine Aenderung erlitten haben. Es sind also die auf pag. 292 angegebenen Verhältnisse, welche den Drei- und Dreikantnern ebenfalls zukommen.

5) Neigung der Kanten gegen die Achse c.

a) Die von den zwei wachsenden Flächen des Sechs- und Sechskantners gebildete Kante B′ hat das Verhältniss von sin : cos $= vC : Cc'$ (Fig. LXXXIII)

$$= \frac{2s}{2n-1} : \gamma c = 2s : (2n-1)\gamma c.$$

b) Die neuentstandene Kante A′ hat sin : cos $= bC : Cc$

$$= \frac{2s}{n+1} : \gamma c = 2s : (n+1)\gamma c.$$

c) Die Lateralkante $C' = \frac{2s}{n-2} : \gamma c = 2s : (n-2)\gamma c.$

Letzteres Verhältniss ist auf den ersten Blick nicht so klar; man kann es aber leicht auf zweierlei Art beweisen. Offenbar hat die Kante qo, unsere Lateralkante (Fig. LXXXII) dieselbe Neigung wie die ihr parallele Endkante γq des eingeschlossenen Rhomboëders, dessen Lateralkanten mit den Lateralkanten des Drei- und Dreikantners zusammenfallen, also gilt für sie sin : cos $= lh : h\gamma$ (Fig. LXXXIII), für $lh : h\gamma$ hatten wir pag. 309 die Werthe $\frac{4s}{3n}$ und $\frac{2(n-2)\gamma c}{3n}$. Es verhält sich daher für die Lateralkante sin : cos $= lh : h\gamma$

$$= \frac{4s}{3n} : \frac{2(n-2)\gamma c}{3n} = 2s : (n-2)\gamma c = \frac{2s}{n-2} : \gamma c.$$

Dasselbe findet man, wenn man sich die Flächen, deren Lateralkanten parallel laufen, z. B. qoc und q''o' (Fig. LXXXIV) so weit wachsend denkt, bis sie sich schneiden. Die Kante, die sie miteinander bilden, wird ebenfalls parallel der Lateralkante qo und q''o', also in der Richtung ch laufen. Diese beiden Flächen io und hk (Fig. LXXVI) schneiden sich in E, d. h. in $\frac{2s}{n-2}$ und wir bekommen auf diese Weise ebenfalls

$$\sin : \cos = EC : \gamma c = \frac{2s}{n-2} : \gamma c.$$

Es sind also auch hier wieder die Dimensionen s des Drei- und Dreikantners, wie sie von einer Fläche geschnitten werden, welche uns für die dreierlei Kanten das Verhältniss von Sinus gegen den gemeinschaftlichen Cosinus γc geben, wie sie auch in den Werthen der 3 Kanten als das wechselnde und bestimmende derselben auftraten.

6) **Neigung der Flächen in den Kanten gegen einander.**

a) In den kürzeren Kanten A'.

Es sind dies die Kanten, die von γc nach $\frac{2s}{n+1}$ Ce (Fig. LXXVI) laufen. Für den halben Winkel ist sin : cos = uC zu dem Perpendikel aus C auf die Kante, d. h. auf die Hypotenusa des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten Ce und γc sind.

Es ist daher $\sin:\cos = uC : \frac{\gamma c \,.\, Ce}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + (Ce)^2}} = \frac{1}{n-1} a : \frac{\frac{\gamma c \,.\, 2s}{n+1}}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + \frac{4s^2}{(n+1)^2}}}$

$$= \frac{1}{n-1} a : \frac{\gamma c \,.\, 2s}{\sqrt{(n+1)^2 \gamma^2 c^2 + 4s^2}} = \sqrt{(n+1)^2 \gamma^2 c^2 + 4s^2} : (n-1)\gamma c \,.\, 2s.$$

b) In den längeren Kanten B'.

Da dies die bleibenden Kanten des Sechs- und Sechskantners sind, so ist für sie $\sin : \cos = \sqrt{4s^2 + (2n-1)^2 \gamma^2 c^2} : 2s\gamma c$. (pag. 293).

c) In den Lateralkanten C'.

Die beiden Flächen, welche sie bilden, neigen sich gegen einander unter demselben Winkel, den sie miteinander gegen die Dimension $\frac{1}{n}$ a am Sechs- und Sechskantner bilden.

Es gilt daher für den halben Lateralkantenwinkel

$$\sin : \cos = 2s\gamma c n : \sqrt{4s^2 + (n-2)^2\gamma^2 c^2} \text{ (pag. 293).}$$

Ein Schnitt senkrecht auf der Achse c, der nicht durch den Mittelpunct geht, erscheint stets als ein drei- und dreiwinkliges Sechseck (wie Fig. LXXVIII). Die kürzere Kante läuft in der Richtung von gc nach b, die längere von γc nach t. Da nun die beiden Linien cb und ct sich stets verhalten wie Cv : Cb wie $\frac{2s}{2n-1} : \frac{2s}{n+1}$, so ergiebt sich daraus, dass der Winkel an b stets schärfer sein muss, als der an t, d. h. dass die kürzere Kante stets die schärfere sein muss.

Die beiden Kanten können aber auch nicht gleich werden, denn wäre dies der Fall, so müsste $\frac{2s}{2n-1} = \frac{2s}{n+1}$ sein. Daraus erhielte man $2n - 1 = n + 1$ und $n = 2$, d. h. der Drei- und Dreikantner verwandelt sich in diesem Falle in das gewöhnliche Dihexaëder $\left(a : \overset{\gamma c}{\tfrac{1}{2}a} : a\right)$.

7) Ebene Winkel der Drei- und Dreikantner.

Man findet sie ebenfalls am leichtesten aus den 3 Seiten der Dreiecke. Man erhält

a) für den ebenen Endspitzenwinkel

$$\sin:\cos = 3a\sqrt{s^2+(n^2-n+1)\gamma^2c^2} : (2n-1)(n+1)\gamma^2c^2+2s^2$$

b) für den stumpfen Lateralwinkel (an der kürzeren Polkante)

$$\sin:\cos = 3a\sqrt{s^2+(n^2-n+1)\gamma^2c^2} : (n+1)(n-2)\gamma^2c^2-2s^2$$

c) den spitzen Lateralwinkel (an der längeren Polkante)

$$\sin:\cos = 3a\sqrt{s^2+(n^2-n-1)\gamma^2c^2} : (2n-1)(n-2)\gamma^2c^2+2s^2.$$

Bei gleichem Sinus ist wiederum der Cosinus von den Grössen, welche die Nenner von den Brüchen für den Werth unserer 3 Dimensionen s, welche die Drei- und Dreikantnerfläche schneidet, bilden, abhängig, nehmlich von $n + 1$, $2n - 1$, $n - 2$, wie sie auch das bestimmende des Werthes der Kanten selbst und ihrer Neigung gegen die Achse c waren.

§. 103. *Rhomboëder der Drei- und Dreikantner.*

Wir werden durch jeden Drei- und Dreikantner unmittelbar auf 3 Rhomboëder hingeführt, die gewissermassen in ihm eingeschlossen sind und aus denen allen wir uns den Drei- und Dreikantner entstanden denken können. Diese 3 Rhomboëder entsprechen nehmlich den dreierlei Kanten des Drei- und Dreikantners, immer eine Art der Kanten desselben hat denselben Verlauf, wie die Kanten eines bestimmten Rhomboëders, fallen mit diesen zusammen, der Drei- und Dreikantner kann als ein aus der Zuschärfung dieser Kanten entstandener Körper aufgefasst werden. Wir wollen diese Rhomboëder etwas näher betrachten und nach den Kanten des Drei- und Dreikantners, als Rhomboëder der Lateralkanten, der stumpferen und der spitzeren Endkanten bezeichnen, je nachdem die Lateral- die stumpferen oder spitzeren Endkanten des Drei- und Dreikantners mit denen eines Rhomboëders zusammenfallen.

1) Rhomboëder der Lateralkanten.

Wir haben dieses schon betrachtet bei der Berechnung der Lateralkanten des Drei- und Dreikantners. Der Drei- und Dreikantner entsteht aus diesem Rhomboëder oder erscheint untergeordnet an ihm als Zuschärfung seiner Lateralkanten. Dieser Drei- und Dreikantner ist stets gleicher Ordnung mit dem Rhomboëder, aus welchem er entsteht. Ist uns der Drei- und Dreikantner gegeben, so ist uns damit auch das Rhomboëder bestimmt, welches seinen Lateralkanten entspricht.

Wir finden nehmlich die Werthe für die Dimensionen c und s aus den bekannten des Drei- und Dreikantners auf folgende Weise.

a) Die Dimension c. Es sei cC (Fig. LXXXIII) $= \gamma c$ des Drei- und Dreikantners, $\gamma C = \gamma' C$ des eingeschlossenen Rhomboëders. Wir wissen, dass ein Schnitt durch die Lateralecken senkrecht auf c geführt $hC = \frac{1}{3} C\gamma$ abschneidet. Für hC hatten wir pag. 309

$$ch : hC : cC = cl : lb : cb = 2(n+1) : n-2 : 3n$$

$$hC = \frac{n-2}{3n} \gamma c, \text{ also da } hC = \tfrac{1}{3} C\gamma$$

$$\gamma' c = C\gamma = \frac{(n-2)\gamma c}{n}.$$

b) Die Kante unseres eingeschlossenen Rhomboëders läuft von γ nach d, schneidet also dC von der Dimension s ab.

Nun ist $lh : dC = \gamma h : \gamma C = 2 : 3$, also

$dC = \frac{3}{2} lh$, für lh hatten wir (pag. 309) gefunden, $\frac{4s}{3n}$, also wird $dC = \frac{3}{2} \cdot \frac{4s}{3n} = \frac{2s}{n}$.

Nun wissen wir, dass, wenn die beiden Polkanten einer Rhomboëderfläche nach 2 s laufen, das zwischen diesen beiden liegende s in der Einheit geschnitten wird. Wir erhalten daher für unser eingeschriebenes Lateralkantenrhomboëder

das Zeichen $\left(\frac{2s}{n} : \overset{\frac{(n-2)\gamma c}{n}}{\frac{s}{n}} : \frac{2s}{n}\right) = \left(2s : \overset{(n-2)\gamma c}{s} : 2s\right)$.

Ist also $n = 3$ und $\gamma = 1$, der Drei- und Dreikantner dann $= \left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right)$, was der beim Kalkspath am häufigsten vorkommende ist, so wird das eingeschlossene Lateralkantenrhomboëder $= \left(2s : \overset{c}{s} : 2s\right)$, d. h. das Hauptrhomboëder.

2) **Rhomboëder der stumpferen längeren Endkanten B′.**

Sie laufen von γc, c' nach l (Figur LXXXIII) oder t Fig. LXXVIII, schneiden also die Dimension $s = Cv = \frac{2s}{2n-1}$. Die Flächen laufen also wie die Linien t, t′ und t Figur LXXVIII. Das Rhomboëder bekommt also das Zeichen

$$\left(\frac{2s}{2n-1} : \frac{\frac{\gamma c}{s}}{2n-1} : \frac{2s}{2n-1}\right) = \left(\overset{(2n-1)\gamma c}{2s' : s' : 2s'}\right).$$

Für $n = 3$ ist es also das fünffach schärfere vom Grundrhomboëder ausgegangen. Es ist stets entgegengesetzter Ordnung von dem Rhomboëder der Lateralkanten, indem die Diagonale seiner Fläche in der Ebene, welche durch cq und γq (Fig. LXXXII), d. h. durch die scharfe Kante des Drei- und Dreikantners oder die Endkante seines Lateralkantenrhomboëders geht, verläuft. Es ist daher in seinem Zeichen zu accentuiren, wenn dieses nicht accentuirt wird.

3) **Rhomboëder der kürzeren schärferen Endkante A′.**

Sie laufen von γc, c (Fig. LXXXIII) nach l, c nach b (Fig. LXXVIII), schneiden also die Dimension $s = Cb = \frac{2s}{n+1}$. Die Flächen dieses Rhomboëders durch γc gelegt laufen also in unserer Projectionsebene wie die Linien bbb. Ihr Zeichen ist also $\left(\frac{2s}{n+1} : \frac{\frac{\gamma c}{s}}{n+1} : \frac{2s}{n+1}\right) = \left(\overset{(n+1)\gamma c}{2s : s : 2s}\right)$.

Sie sind gleicher Ordnung mit dem Lateralkantenrhomboëder, wie aus Fig. LXXXII zu ersehen, da ihre Endkanten in der Richtung cq und cq′ laufen, ihre Flächen also über die Flächen des eingeschlossenen Lateralkantenrhomboëders zu liegen kommen.

Bei dem gewöhnlichen Drei- und Dreikantner des Kalkspathes, für den $n = 3$, $\gamma = 1$ ist, wird das Rhomboëder

der stumpfen Endkante das $\left(2s' : \overset{5c}{s'} : 2s'\right)$ oder $\left(a' : \overset{5c}{a'} : \infty a\right)$ d. h. das fünffach schärfere entgegengesetzter Ordnung vom Hauptrhomboëder; das der scharfen Endkante $= \left(2s : \overset{4c}{s} : 2s\right)$ $= \left(a : \overset{4c}{a} : \infty a\right)$, d. h. das vierfach oder das II. schärfere vom Hauptrhomboëder (Taf. XIII, Fig. 151). Beide kommen auch wirklich mit dem gewöhnlichen Drei- und Dreikantner öfter vor. Bei gleicher horizontaler Projection ist also das Verhältniss der Hauptachse der dreierlei Rhomboëder eines Drei- und Dreikantners so, dass die Achse des Rhomboëders der längeren Polkanten gleich ist den Achsen der beiden andern zusammengenommen, da $2n - 1 = (n - 2) + (n + 1)$. Jeder Drei- und Dreikantner führte uns also unmittelbar auf 3 bestimmte Rhomboëder. Gehen wir von dem Rhomboëder aus, so werden uns ebenso dreierlei Drei- und Dreikantner bestimmt. Diese erscheinen an ihm untergeordnet als Zuschärfung seiner Kanten. Da aber die Kanten des Rhomboëders unter sehr verschiedenen Winkeln zugeschärft sein können, so kommen wir aus den Rhomboëdern auf eine grosse Menge möglicher Drei- und Dreikantner, die immer eine Art ihrer dreierlei Kanten mit dem Rhomboëder zusammenfallend haben. Wir müssen daher hier 3 Abtheilungen von Drei- und Dreikantnern unterscheiden.

Die I. Abtheilung enthält diejenigen, welche aus der Zuschärfung der Lateralkanten des Rhomboëders entstehen. Sie sind alle schärfer gegen die Achse geneigt, als das Hauptrhomboëder; ist daher bei diesem $\gamma c = 1 c$, so kann bei jenem γ zwischen 1 und ∞ alle möglichen Werthe haben. Alle aber haben das gemeinschaftlich, dass ihre Lateralkanten mit den Lateralkanten ihres Grundrhomboëders zusammenfallen, alle der Bedingung entsprechen müssen, dass $(n - 2)\gamma c$ des Drei- und Dreikantners $= c$ ihres Grundrhomboëders also $\gamma = \frac{1}{n - 2}$ sein muss. Bei dem Kalkspath kommen mehrere

solcher Drei- und Dreikantner vor, ausser dem erwähnten sind es z. B. noch die, wo $n = 4$ und $\gamma = \frac{1}{2}$, $n = 5$ und $\gamma = \frac{1}{3}$, $n = 6$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $n = 7$, $\gamma = \frac{1}{5}$ wird. Es sind dies die Drei- und Dreikantner $\left(a : \overset{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{4}a} : \frac{1}{3}a\right)$ $\left(a : \overset{\frac{1}{3}c}{\frac{1}{5}a} : \frac{1}{4}a\right)$ $\left(a : \overset{\frac{1}{4}c}{\frac{1}{6}a} : \frac{1}{5}a\right)$ $\left(a : \overset{\frac{1}{5}c}{\frac{1}{7}a} : \frac{1}{6}a\right)$, wovon Taf. XIII, Fig. 152. 2 zeigt.

II. Abtheilung. Es sind dies solche Drei- und Dreikantner, deren stumpfe Endkante mit der Endkante des Rhomboëders zusammenfällt. Sie erscheinen untergeordnet am Rhomboëder als Zuschärfung seiner Endkanten und zwar in der Art, dass die neuentstehende über der Poldiagonale der Rhomboëderfläche gelegene Kante zweier, verschiedenen Kanten angehörigen Zuschärfungsflächen schärfer ist, als die zugeschärfte Rhomboëderkante. Die beiden Gränzglieder dieser Abtheilung sind einerseits die gerade Abstumpfung der Rhomboëderkante, wo beide Zuschärfungsflächen in eine zusammenfallen, d. h. also einem Winkel von 180° bilden würden, andererseits die Flächen des Dihexaëders, an dem beide Kanten gleich werden.

III. Abtheilung. Hierher gehören diejenigen Drei- und Dreikantner, deren scharfe Endkante mit der des Rhomboëders zusammenfällt. Ihre Gränzglieder sind einerseits die Rhomboëderfläche selbst, wenn nehmlich 2 Zuschärfungsflächen von verschiedenen Kanten über der Rhomboëderfläche zusammenfallen, die stumpfe Drei- und Dreikantnerkante also einen Winkel von 180° bilden würde, andererseits ebenfalls das Dihexaëder.

Die Lateralkanten der Drei- und Dreikantner der beiden letzten Abtheilungen bekommen entgegengesetzte Richtungen. Die zweiter Abtheilung laufen über der Rhomboëderfläche von den Lateralecken aus nach aufwärts, da ja die über der Rhomboëderfläche neuentstehende Kante die schärfere und

kürzere wird, bei den Drei- und Dreikantnern dritter Abtheilung dagegen laufen sie nach abwärts. Zwischen beiden liegt als Gränzglied wieder das Dihexaëder, dessen Lateralkanten horizontal laufen.

Die Drei- und Dreikantner II. Abtheilung müssen also dasselbe Verhältniss ihrer stumpfen Endkante haben, wie die Endkante des Rhomboëders, d. h. sie müssen der Bedingung $(2n - 1)\gamma c = c$ des Rhomboëders entsprechen. Für das Hauptrhomboëder des Kalkspaths dessen $c = 1$ entsprechen dieser Bedingung die Drei- und Dreikantner $\left(\overset{\frac{1}{5}c}{a' : \frac{1}{3}a' : \frac{1}{2}a'}\right)$ und $\left(\overset{\frac{1}{8}c}{a' : \frac{2}{9}a' : \frac{2}{7}a'}\right)$, für welche also $n = 3$, $\gamma = \frac{1}{5}$ und $n = \frac{9}{2}$, $\gamma = \frac{1}{8}$ ist.

Für die Drei- und Dreikantner III. Abtheilung, deren scharfe Endkante mit der Endkante des Rhomboëders zusammenfallen soll, muss (pag. 310) $(n + 1)\gamma c = c$ des Rhomboëders sein. Dieser Bedingung entsprechen beim Kalkspath die Drei- und Dreikantner, deren $n = 3$, $\gamma = \frac{1}{4}$; $n = 4$, $\gamma = \frac{1}{5}$; $n = 6$, $\gamma = \frac{1}{7}$ ist u. s. f. $\left(\overset{\frac{1}{4}c}{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}\right)$ $\left(\overset{\frac{1}{5}c}{a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a}\right)$ $\left(\overset{\frac{1}{7}c}{a : \frac{1}{6}a : \frac{1}{5}a}\right)$.

Dihexaëder von abnormer Flächenstellung $\frac{1}{2}\left(\overset{\gamma c}{a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n-1}a}\right)$, $\frac{r}{l}\,\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{r}\,\frac{mPn}{2}$ (Naumann).

Sie entstehen durch abwechselndes Wachsen und Schwinden je zweier an einer Lateralkante liegenden Flächen des Sechs- und Sechskantners. Sie kommen nur untergeordnet vor und erscheinen wie Fig. 137 die Flächen u und b als schiefe Abstumpfungen der Ecken zwischen Säulen- und Dihexaëderflächen, und zwar oben und unten an derselben Seite der Säulenfläche. Da sie für sich nicht vorkommen, gehen wir nicht weiter auf die Werthe ihrer Kanten und Winkel ein.

Ihre Combinationsverhältnisse mit andern Flächen sind dieselben wie die der Sechs- und Sechskantnerflächen.

Geneigtflächig hemiedrische Gestalten.

§. 104. Hierher gehören a) die Trigonoëder (Rose). Trigonale Pyramiden (Naumann). Es sind Hälftflächner der Dihexaëder, wie die Rhomboëder, mit dem Unterschiede jedoch, dass immer je 2 an ein und derselben Lateralkante zusammenstossende Flächen des Dihexaëders wachsen, während die anstossenden verschwinden. Der auf diese Weise gebildete Körper hat 6 Flächen, zweimal 3 gleiche Polkanten und 3 horizontale Lateralkanten, 2 3kantige reguläre Polecken und 3 symmetrische 2 und 2kantige Lateralecken. Für sich allein würden die Trigonoëderflächen Körper bilden, die Taf. XIII, Fig. 143 und 144 dargestellt sind, und sich wie ein Rhomboëder und sein Gegenrhomboëder zu einander verhalten. Mit den Dihexaëdern, aus denen sie entstanden gedacht werden, haben sie die Neigung der Fläche gegen die Achsen und in der Lateralkante, mit dem aus denselben entstandenen Rhomboëdern die Neigung der Flächen in den Lateralkanten gegen einander gemeinschaftlich. Sie sind immer nur untergeordnet mit andern Flächen beobachtet worden, namentlich am Quarz als abwechselnde Abstumpfung der Lateralecken des Dihexaëders (s Fig. 128).

b) Die hexagonalen Trapezoëder (Naumann), welche aus den Sechs- und Sechskantnern durch abwechselndes Wachsen und Schwinden der einzelnen Flächen desselben, welche nicht eine Lateralkante zusammen bilden, entstehen, also den Trapezoëdern des 2 und 2achsigen Systemes entsprechen würden, kommen in der Wirklichkeit nicht allein vor. Für sich würden sie die Fig. 148 und 149 dargestellte Gestalt bilden. u und b Fig. 137 sind solche Flächen.

Tetartoëdrische Gestalten.

§. 105. Die Drei- und Dreikantner, welche wir als Hälftflächner der Sechs- und Sechskantner kennen gelernt haben, sind wiederum der Hemiedrie fähig; es entstehen also Körper aus ihnen, welche nur von dem vierten Theil der dem homoëdrischen Körper von gleichem Parameterverhältnisse zukommenden Flächen gebildet sind. Auch hiebei zeigen sich wieder dieselben Verschiedenheiten im äusseren Ansehen, indem es nehmlich ebenfalls solche Viertelsflächner mit parallelen Flächen und geneigtflächige giebt.

Parallelflächig tetartoëdrische Gestalten.

§. 106. Sie entstehen aus den Drei- und Dreikantnern, indem die abwechselnden einzelnen Flächen oben und unten, rechts und links wachsen und schwinden, so dass, wenn (Fig. LXXXII) cqo eine wachsende, c′oq eine schwindende, coq′ eine schwindende, c′q′o eine wachsende Fläche wird. Da nun auf diese Weise die parallelen Flächen stets bleibende oder schwindende sind, so entsteht ein parallelflächiger Körper, und da jede Fläche mit den 2 wachsenden Flächen, welche an den 2 Lateralecken mit ihr zusammenstossen und ebenso mit den 2 wachsenden derselben oberen oder unteren Hälfte, die an dem Polecke mit ihr zusammentreffen, zum Schneiden kommt, so entsteht daraus ein Rhomboëder von abnormer Flächenstellung, ein sg. gedrehtes Rhomboëder, das seinen Namen davon erhalten hat, dass seine Flächen sich nicht in einer Ebene schneiden, welche durch γc und eine Dimension a oder s gelegt ist, sondern zwischen diesen beiden, dass sie also im Vergleich mit den bisher betrachteten Rhomboëdern gleichsam um die Hauptachse etwas gedreht erscheinen, und keiner Dimension s oder a parallel laufen, wie diese.

In jedem Drei- und Dreikantner sind nun ebenfalls zwei solcher Rhomboëder enthalten, je nachdem nehmlich die Flächen v, v, v (Fig. LXXXIV) oder o, o, o die wachsenden sind. Diese 2 verhalten sich daher ebenfalls wie ein Rhomboëder und sein Gegenrhomboëder, bilden zusammen jedoch kein Dihexaëder, sondern einen Drei- und Dreikantner.

Wenn sie für sich allein vorkommen, sind sie von den gewöhnlichen Rhomboëdern nicht zu unterscheiden, sie kommen jedoch häufig untergeordnet mit anderen Flächen vor und geben sich dann leicht als Hälftflächner von Drei- und Dreikantnern zu erkennen. An diesen selbst erscheinen sie dann meistens als dreiflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuschärfungsflächen schief aufgesetzt auf die scharfen oder die stumpfen Polkanten.

Ausser diesen 2 Rhomboëdern, als den Hälftflächnern eines bestimmten Drei- und Dreikantners stehen aber noch in enger Verbindung mit jedem Drei- und Dreikantner 3 andere Rhomboëder, nehmlich $\alpha\alpha\alpha$, $\beta\beta\beta$, $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ (Fig. LXXXV) *). Es sind dies nehmlich diejenigen, welche durch 2 Kantenzonen bestimmt werden, nehmlich den Kanten verschiedener Hälftflächner des Drei- und Dreikantners. Denken wir uns nehmlich die Flächen hi, mn, wz wachsend, so entsteht daraus das Rhomboëder r″Sr′, dessen Endkanten von γc nach r″, S und r′ laufen; wachsen dagegen die 3 abwechselnden Flächen im, nw, zh, so entsteht daraus das Rhomboëder rxy, dessen Endkanten von γc nach x, y und r laufen. Die 6 Endkanten dieser 2 Rhomboëder geben uns nun sechs Kantenzonen und durch je 2 derselben eine Rhomboëderfläche gelegt, giebt uns dreierlei Rhomboëder, nehmlich

1) das Rhomboëder $\alpha\alpha\alpha$, bestimmt durch die Zonenpuncte γc und S und r, y und r″, r′ und x,

*) Vergl. Weiss: Neue Bestimmung einer Rhomboëderfläche am Kalkspath. Abh. d. Berl. Ac. Jahr 1836.

2) das Rhomboëder $\beta\beta\beta$, bestimmt durch die Zonenpuncte γc und yS, rr', xr'',

3) das Rhomboëder $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$, bestimmt durch die Zonenpuncte γc und r''r, Sx, r'y.

Welches sind nun die Werthe dieser Rhomboëder?

1) Das Rhomboëder $\alpha\alpha\alpha$ wird $\left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{2n-1}\gamma c\\ a' : a' : \infty a\end{matrix}\right)$.

In dem Dreiecke fta (Fig. LXXXV) ist Ca = Cf = a, fq = qa, Cv = Co = $\frac{1}{n}$a, Ct = Cu = $\frac{1}{n-1}$a, Cq = $\frac{1}{2}$a. Nach der Formel

$x : y = Na : M(a + b)$ ist

tr : ra = tv . qf : vq (2 . qf) = tv : 2 . vq, d. h.

$$tr : ra = tC + Cv : 2(Cq - Cv)$$

$$= \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)a : 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)a = \frac{2n-1}{n(n-1)} : \frac{n-2}{n}$$

$$tr : ra : ta = 2n-1 : (n-2)(n-1) : n(n-1) + 1.$$

Ferner ist in dem Dreiecke aCt, da $\alpha r \alpha$ parallel Ct

tr : ra : ta = Cl : la : Ca, d. h.

$$Cl = \frac{tr . Ca}{ta} = \frac{2n-1}{n(n-1)+1}a,$$ das Rhomboëder

wird daher, da Cl = Ck $\left(\frac{2n-1}{n(n-1)+1}a' : \overset{\gamma c}{\frac{2n-1}{n(n-1)+1}}a' : \infty a\right)$

wofür wir, wie oben, schreiben können $\left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{2n-1}\gamma c\\ a' : a' : \infty a\end{matrix}\right)$.

2) Das Rhomboëder $\beta\beta\beta$ wird $\left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{n+1}\gamma c\\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$.

In dem Dreiecke afo haben wir nach derselben Formel

$x : y = Na : M(a + b)$

$$ar : ro = au . Cf : Cu(fC + Co) = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)a : \frac{1}{n-1}a\left(a + \frac{1}{n}a\right)$$

$$= n-2 : \frac{n+1}{n} = n(n-2) : n+1$$

und $ar : ro : ao = n(n-2) : n+1 : n^2-n+1$, da aber $\beta r \beta$ parallel bof, so ist $ro : ao = dC : aC$; $dC = \frac{ro}{ao} aC$

$$= \frac{n+1}{n^2-n+1} a = \frac{n+1}{n(n-1)+1} a.$$

Das Rhomboëder wird also wie oben

$$\left(\frac{n+1}{n(n-1)+1} a : \overset{\gamma c}{\frac{n+1}{n(n-1)+1}} a : \infty a\right) = \left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{n+1}\gamma c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$$

3) Das Rhomboëder $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ wird $\left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{n-2}\gamma c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$.

Ziehen wir nehmlich die Linie rr'', so finden wir für das Stück Ce, welches sie von der Dimension a abschneidet, da er parallel Ca in dem Dreiecke oCa

$$Ce : Co = ar : ao$$

$$Ce = \frac{ar}{ao} Co = \frac{(n-2)n}{n(n-1)+1} \cdot \frac{1}{n} a = \frac{n-2}{n(n-1)+1} a$$

Das Rhomboëder wird also wie oben

$$\left(\frac{n-2}{n(n-1)+1} a : \overset{\gamma c}{\frac{n-2}{n(n-1)+1}} a : \infty a\right) = \left(\begin{matrix}\frac{n(n-1)+1}{n-2}\gamma c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$$

Bei dem gewöhnlichen Drei- und Dreikantner des Kalkspathes, für den $n = 3$, $\gamma = 1$ ist, wird das erste dieser 3 Rhomboëder $= \left(\begin{matrix}\frac{7}{5}c \\ a' : a' : \infty a\end{matrix}\right)$, das zweite $= \left(\begin{matrix}\frac{7}{4}c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$, das dritte $= \left(\begin{matrix}7c \\ a : a : \infty a\end{matrix}\right)$. Sie kommen alle 3 wirklich vor und sind schärfer gegen die Achse geneigt als das Hauptrhomboëder, das erste und zweite sind, wie auch die Fig. LXXXV sogleich erkennen lässt, weniger scharf gegen c geneigt als der Drei- und Dreikantner, während das dritte schärfere Neigung hat. Die beiden ersteren erscheinen daher als Zuspitzung der Polecke; die Zuspitzungsflächen des ersten sind auf die scharfen, die des zweiten auf die stumpfen Pol-

kanten des Drei- und Dreikantners aufgesetzt. Die Flächen des dritten erscheinen als Abstumpfung der Lateralecken.

Das erste Rhomboëder kommt dem Würfel in den Winkeln sehr nahe. Berechnet man nehmlich den Endkantenwinkel, so findet man nach der Formel für denselben

$$\sin : \cos = \sqrt{4s^2 + c^2} : c\sqrt{3} = \sqrt{4 . s^2 + 7^2} : 7\sqrt{3} = \sqrt{149} : \sqrt{147},$$

in Graden ausgedrückt giebt dies 90°, 23′, 13,7″.

Geneigtflächig tetartoëdrische Körper.

§. 107. Trapezoëder (Rose). Trigonale Trapezoëder (Naumann).

Es sind Hälftflächner der Drei- und Dreikantner, die auf die Art entstehen, dass immer je 2 eine Lateralkante zusammen bildende Flächen oben und unten wachsen, während die beiden benachbarten schwinden. Dadurch entstehen 2 von 6 Trapezoiden gebildete Körper, die man als rechtes und linkes Trapezoëder unterscheiden kann (Fig. 145 und 146). Sie kommen ebenfalls nie für sich allein, sondern stets untergeordnet mit andern Flächen vor und sind bis jetzt nur am Quarz beobachtet worden, wo sie (u Fig. 128) erscheinen als Abstumpfung der Lateralecken.

Eine nähere Betrachtung der auf diese Weise gebildeten einfachen Körper wollen wir daher unterlassen.

---

§. 108. Von besonderer Wichtigkeit, namentlich für die Berechnung der Combinationen, sind die

Neigungsverhältnisse der verschiedenartigen Flächen gegen einander,

von denen wir daher die häufigsten und wichtigsten jetzt näher betrachten wollen, nehmlich die Neigungsverhältnisse der übrigen Flächen gegen die Dihexaëder- und die zweierlei Säulenflächen.

Alle verschiedenen Dihexaëder lassen sich ganz allgemein unter zweierlei Bezeichnungen betrachten, nehmlich

die I. Ordnung als $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$, wo γ alle Werthe zwischen o und ∞ haben kann. Für $\gamma = 1$ erhalten wir das Grunddihexaëder, wird γ kleiner als 1, so giebt dies die stumpferen, wird es grösser als 1 die schärferen Dihexaëder I. Ordnung. Ebenso lassen sich unter der Form $\left(2a : \overset{\gamma c}{a} : 2a\right)$ alle Dihexaëder II. Ordnung zusammenfassen. Wir finden daher für die Neigung

1) **der Dihexaëder I. Ordnung:**

a) gegen die Säulenfläche I. Ordnung, auf welche gerade aufgesetzt erscheinen. Das Complement dieses Winkels x (Fig. LXXXVI), nehmlich $\measuredangle$ z ist $= \measuredangle$ y, d. h. gleich dem Neigungswinkel der Fläche gegen γc

also $\sin : \cos = s : \gamma c$,

b) gegen die benachbarte Säulenfläche I. Ordnung, welche in einem Ecke an a mit der Dihexaëderfläche zusammenstösst, z. B. von r· gegen g· Fig. 126. Es sei ebenfalls Fig. LXXXVI x dieser Winkel, so erhalten wir, wenn wir 90° davon abziehen, den Winkel γlf, d. h. den Neigungswinkel der Dihexaëderfläche gegen die Dimension a; also ist

für $\measuredangle x - 90^0 \sin : \cos = \gamma c . 2s : \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4s^2}$ (pag. 284),

c) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, d. h. den Winkel, den die Fläche aa·γc (Fig. LXXV) gegen die Säulenfläche, welche die Kante lh abstumpft, macht. Wir berechnen am besten wieder das Complement dieses Winkels zu 2 R, welches gleich ist dem Winkel, welchen die Fläche mit einer parallel lh durch γc gelegten Ebene macht, die also in der Richtung Cg läuft. Unsere Dihexaëderfläche schneidet diese Ebene in einer Linie von γc nach g. Wählen wir nun als das Verhältniss von Cosinus dieses Winkels das Perpendikel aus C auf diese Linie, so giebt uns das Verhältniss von Sinus zu diesem Cosinus die auf Cg und

der Cosinuslinie senkrecht stehende Linie, nehmlich Ca, die von unserer Dihexaëderfläche in a geschnitten wird. Es ist also

$$\sin : \cos = a : \frac{\gamma c \,.\, Cg}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + (Cg)^2}}. \quad Cg \text{ ist } = 2s,$$

also wird daraus

$$\sin : \cos = a \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4 s^2} : \gamma c \,.\, 2s.$$

2) Der Dihexaëder II. Ordnung $\left(2a : \overset{\gamma c}{a} : 2a\right)$.

Bei diesen verhalten sich alle Linien wie bei den Dihexaëdern I. Ordnung, so wie wir in der Bezeichnung und den Formeln derselben statt s a und statt a $\frac{4}{3}$s setzen, indem die Dihexaëderfläche I. Ordnung auch als $\left(2s : \overset{\gamma c}{s} : 2s\right)$ bezeichnet werden kann. Wir bekommen daher für die Neigung der Dihexaëderflächen II. Ordnung

a) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, auf die sie gerade aufgesetzt erscheint,

$$\sin : \cos = a : \gamma c,$$

b) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, mit welcher sie in $s' = \frac{4}{3}s$ zusammenstösst,

$$\sin : \cos = a \gamma c : \tfrac{4}{3} s \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4a^2} = \sqrt{3} . \gamma c : \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4}$$

c) gegen die Säulenflächen I. Ordnung

$$\sin : \cos = \tfrac{4}{3} s \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4a^2} : \gamma c \,.\, 4a = \sqrt{\gamma^2 c^2 + 4} : 2 \gamma c \sqrt{3}.$$

3) Der Sechs- und Sechskantner $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

a) gegen die Säulenfläche I. Ordnung, auf welche sie schräg aufgesetzt erscheint, der Fläche iv (Fig. LXXVI) gegen die AF parallele Säulenfläche. Auch hier betrachten wir wieder am besten das Complement dieses Winkels zu 180°, der gleich dem Winkel ist, welchen die Fläche mit einer parallel AF, also durch CD und γc gelegten Ebene bildet. Wählen wir wieder das Perpendikel aus C auf die von γc nach D gezogene Linie, die Kante, welche unsere Fläche vi mit der

durch CD gelegten Ebene bildet, als Verhältniss des Cosinus gegen die auf dieser Linie und unserer Ebene senkrecht stehende Linie CG, so weit sie von der Fläche iv geschnitten wird, welche uns dann das Verhältniss des Sinus dazu liefert, so ist

$$\sin : \cos = \mathrm{Cv} : \frac{\gamma c \,.\, \mathrm{CD}}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + (\mathrm{CD})^2}} = \frac{2s}{2n-1} : \frac{\gamma c \,.\, a}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + a^2}}$$
$$= 2s \,.\, \sqrt{\gamma^2 c^2 + 1} : (2n-1)\gamma c,$$

b) gegen die Säulenfläche I. Ordnung, mit welcher sie in dem Ecke an a zusammenstösst, der Fläche vi mit der Säulenfläche, die (Fig. LXXVI) parallel FD geht. Das Complement des Winkels, den die Sechs- und Sechskantnerfläche mit dieser Fläche macht, ist gleich dem Neigungswinkel der Fläche vi gegen die durch Cg gelegte Ebene, welche parallel FD geht. Es ist für diesen Winkel

$$\sin : \cos = \mathrm{Ct} : \frac{\mathrm{Cw} \,.\, \gamma c}{\sqrt{(\mathrm{Cw})^2 + \gamma^2 c^2}} = \frac{2s}{n+1} : \frac{\frac{1}{n-1} a \,.\, \gamma c}{\sqrt{\left(\frac{a}{n-1}\right)^2 + \gamma^2 c^2}}$$
$$= 2s\sqrt{(n-1)^2 \gamma^2 c^2 + 1} : \gamma c\,(n+1).$$

c) gegen die Säulenfläche I. Ordnung, mit welcher sie bei gleichmässiger Ausdehnung der Flächen nicht zum Schneiden kommt, welche für vi parallel AH geht. Da diese Fläche parallel der Ebene geht, welche durch γc und Ci gelegt wird, d. h. der Ebene, welche unsern Kantenwinkel zweier Sechs- und Sechskantnerflächen in der Kante von γc nach $\frac{1}{n}$ a halbirt, so ist also das Complement zu 180° des Winkels, den die Fläche des Sechs- und Sechskantners mit dieser Säulenfläche macht, gleich unserm halben Kantenwinkel, in der Kante von γc nach $\frac{1}{n}$ a, also

$$\sin : \cos = 2s\sqrt{a^2 + n^2 \gamma^2 c^2} : \gamma c(n-2),$$

d) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, welche senkrecht auf $\frac{1}{n}$ a steht, also für vi gegen die parallel AD laufende. Ziehen wir von diesem Winkel 90° ab, so bleibt uns der Winkel, unter dem die Fläche gegen $\frac{1}{n}$ a geneigt ist. Es ist also, wenn wir den gesuchten ∡ x nennen

$$\text{für } \measuredangle x - 90^0 \sin:\cos = \sqrt{(n-2)^2\gamma^2c^2+4s^2} : 2n\gamma cs,$$

e) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, welche senkrecht auf $\frac{1}{n-1}$ a steht, für vi derjenigen, welche die Ecke an A abstumpft.

Das Complement dieses Winkels zu 180° ist gleich dem Winkel, welchen die Fläche vi gegen die parallel der Säulenfläche, also durch Ct gelegte Ebene bildet, mit andern Worten gleich dem Kantenwinkel des Drei- und Dreikantners in der von γc nach $\frac{2s}{n+1}$ laufenden Kante, wofür wir hatten

$$\sin:\cos = \sqrt{(n+1)^2\gamma^2c^2+4s^2} : (n-1)\gamma c \,.\, 2s,$$

f) gegen die Säulenfläche II. Ordnung, welche senkrecht auf a steht, also für vi gegen die Fläche, welche das Eck an D abstumpft, also parallel CG geht.

Das Complement dieses Winkels ist gleich dem Neigungswinkel der Fläche gegen die durch Cv gelegte Ebene, d. h. gleich dem halben Kantenwinkel der Kante des Sechs- und Sechskantners, welche von γc nach $\frac{2s}{2n-1}$ geht, wofür wir hatten

$$\sin:\cos = \sqrt{4s^2+(2n-1)^2\gamma^2c^2} : 2s\gamma c,$$

g) gegen die gerade Endfläche $\left(\infty a : \overset{\gamma c}{\infty a} : \infty a\right)$. Jede Fläche bildet mit derselben einen Winkel, der, wenn man 90° von ihm abzieht, gleich dem Neigungswinkel der Flächen gegen die Achse γc wird, wie unmittelbar aus Fig. LXXXVI hervorgeht, wo lf die

gerade Endfläche, blf der Winkel, den dieselbe mit einer beliebigen andern macht, sein soll. Zieht man nun von ∢ blf den ∢ dlf = R ab, so bleibt ∢ bld = ∢ y, d. i. der Winkel der Fläche bl gegen die Achse c.

Alle hemiedrischen oder tetartoëdrischen Gestalten haben gegen die verschiedenen Säulenflächen ganz dieselben Neigungsverhältnisse, wie ihre entsprechenden vollzähligen Körper, da ja durch die Hemiedrie in der Lage der übrigbleibenden Flächen sich nichts verändert. Nur kommen jetzt durch das Verschwinden der Hälfte der Flächen und durch die Ausdehnung der andern solche Flächen mit den verschiedenen Säulenflächen zum Durchschnitt, die sich bei der vollzähligen Ausbildung wohl selten schneiden. In dem vorhergehenden sind die Neigungsverhältnisse der verschiedenen Körper gegen alle Säulenflächen, mit denen sie möglicherweise sich schneiden können, berücksichtigt, es sind daher auch alle für die hemiedrischen Körper möglichen Fälle darunter mit inbegriffen.

Von Invertirungs-Rhomboëdern.

§. 109. Man versteht darunter Rhomboëder, die in einem solchen gegenseitigen Verhältnisse stehen, dass der ebene Endspitzenwinkel des einen gleich ist dem Neigungswinkel in der Lateralkante des andern. Unter welchen Bedingungen nun findet dieses Verhältniss Statt? Es müssen hier offenbar die Werthe, die wir für diese verschiedenen Winkel gefunden haben, einander gleich sein. Wir hatten 1) für den ebenen Endspitzenwinkel, wenn wir $\gamma = 1$ setzen, und 2) für den Lateralkantenwinkel

1) $\sin : \cos = s\sqrt{3} : \sqrt{s^2 + c^2}$,

2) $\sin : \cos = \sqrt{4 s^2 + c^2} : c\sqrt{3}$.

Accentuiren wir nun zur Unterscheidung das s und c des

letzteren, so erhalten wir als die Bedingungsgleichung für Invertirungsrhomboëder aus

$$s\sqrt{3} : \sqrt{s^2 + c^2} = c'\sqrt{3} : \sqrt{4s'^2 + c'^2}$$
$$s^2(4s'^2 + c'^2) = c'^2(s^2 + c^2)$$
$$4s'^2 s^2 = c'^2 c^2$$
$$2s's = c'c \text{ und } s' : c' = c : 2s.$$

Diese Bedingung erfüllen z. B. das Grundrhomboëder und sein erstes schärferes, denn für das erste schärfere ist $s' : c' = \frac{1}{2} : 1 = c : 2s$, wenn wir für das Grundrhomboëder $s : c = 1 : 1$ annehmen, ferner das erste stumpfere und das zweite schärfere, denn für jenes ist $s' : c' = 2 : 1$, für dieses $c : 2s = 4 : 2 = 2 : 1$ u. s. f., immer ist es das mfach schärfere mit dem $\frac{2}{m}$fach stumpferen, also z. B. auch das 3fach schärfere mit dem $\frac{2}{3}$fach stumpferen, denn für jenes ist $s' : c' = 1 : 3$, für dieses $c : 2s = \frac{2}{3} : 2$, es ist aber $1 : 3 = \frac{2}{3} : 2$.

Auch unter den Dihexaëdern, wie in den übrigen Systemen kommen Körper vor, welche auf eine ähnliche Weise gegenseitig bestimmte Winkel miteinander vertauschen, doch ist es bei keinem anderen so häufig und so augenfällig, als bei den Rhomboëdern. *)

---

§. 110. Combinationen des drei- und einachsigen Systemes.

Wegen der grossen Mannigfaltigkeit der hemiedrischen Gestalten dieses Systemes und ihrer grossen Häufigkeit müssen wir namentlich auf diese besonders Rücksicht nehmen, indem die Combinationen derselben viel verwickelter sind, als die der einfachen Gestalten, wie schon einfach daraus hervorgeht, dass wir nur 2 einfache vollzählige, dagegen 5 ein-

*) Vergl. hierüber Weiss: Ueber das Dihexaëder, dessen Flächenneigung gegen die Achse gleich ist seinem ebenen Endspitzenwinkel nebst allgemeineren Betrachtungen über Invertirungskörper. Abh. d. k. Ac. d. Wiss. zu Berl. Jahr 1829.

fache hemiedrische und tetartoëdrische Gestalten kennen gelernt haben. Wir können nur die wichtigsten aus der grossen Menge derselben ausheben und wollen die homoëdrischen namentlich nur ganz im Allgemeinen betrachten.

1) *Homoëdrische Gestalten.*

Es erscheinen

a) am Dihexaëder I. Ordnung:

1) als gerade Abstumpfung der Lateralkanten: die I. Säule (Fig. 126 g),

2) als ger. Abstumpfung der Lateralecken: die II. Säule,

3) als ger. Abst. der Polecken: die gerade Endfläche.

Alle Flächen nun, die zwischen der geraden Endfläche und I. Säulenfläche liegen, und dieselben in horizontalen Kanten schneiden, sind Dihexaëder I. Ordnung (r, x, z Fig. 136). Die stumpferen erscheinen zwischen der geraden Endfläche und der Grunddihexaëderfläche, oder wenn jene nicht vorhanden ist, als auf die Dihexaëderfläche gerade aufgesetzte 6flächige Zuspitzung der Polecke, die schärferen zwischen der Dihexaëderfläche und der Säulenfläche, oder wenn diese nicht vorhanden ist, als Zuschärfung der Lateralkanten des Dihexaëders. Alle Flächen, die mit der Fläche der II. Säule und der geraden Endfläche horizontale Kanten bilden, sind Dihexaëder II. Ordnung (a, s, d Fig. 136). Sie verhalten sich gegen einander und gegen die II. Säulenfläche gerade wie die Dihexaëder und Säule I. Ordnung.

Dihexaëder verschiedener Ordnung erscheinen stets mit einander so, dass die Flächen des einen an der Stelle der Polkanten des andern erscheinen, und zwar entweder als 6flächige Zuspitzung des Poleckes oder als Zuschärfung der Lateralecke, die Flächen aufgesetzt auf die Kanten, ersteres giebt ein stumpferes, letzteres ein schärferes Dihexaëder entgegengesetzter Ordnung, zwischen beide Arten fällt das I. stumpfere als gerade Abstumpfung der Kanten.

4) Die Sechs- und Sechskantnerflächen erscheinen am Dihexaëder als Zuschärfung der Polkanten, oder als 12flächige Zuspitzung der Polecke, oder als 4flächige Zuspitzung der Lateralecke. An der 6seitigen Säule mit der geraden Endfläche erscheinen sie ebenfalls als Zuschärfung der Ecken.

2) *Hemiedrische Gestalten.*

1) Es erscheinen am Rhomboëder:
   a) als gerade Abstumpfung der Lateralecken die Flächen der I. Säule (Taf. XIII, Fig. 142 g),
   b) als ger. Abst. d. Lateralkanten die II. Säule (Fig. 141 a),
   c) als ger. Abstumpf. seiner Polkanten das I. stumpfere Rhomboëder (Fig. 155 $\frac{r'}{2}$,)
   d) als 3fläch. a. d. Polkante aufges. Zusp. der Polecken stumpfere Rhomboëder entgegengesetzter Ordnung,
   e) als schiefe Abst. d. Lateralecken spitzere Rhomboëder entgegenges. Ordnung (Fig. 155 2 r'),
   f) als 3fläch. a. d. Fläche ger. aufges. Zusp. d. Poleck. stumpfere Rhomboëder gleicher Ordn. (Fig. 154 r,)
   g) als schiefe Abst. d. Lateralecken spitz. Rhomboëder gleicher Ordnung,
   h) als Zuschärfung seiner 2erlei Kant. 3 und 3 Kantner (Fig. 151, 3 z. Fig. 152 3 z, 5 z),
   i) als 6fläch. Zusp. seiner Polecken 3 und 3 Kantner,
   k) als gleichfl. *) Zusch. s. Lateraleck. 3 und 3 Kantner.
2) Am Drei- und Dreikantner:
   1) als ger. Abst. seiner 2erlei Polkt. Rhomboëder (Fig. 152 4 r an 5 z)
   2) als ger. Abst. seiner Lateralkt. die II. Säule
   3) als ger. Abst. seiner Lateraleck. die I. Säule (Fig. 156 c)

*) d. h. die Zuschärfung muss durch 2 gleichartige Flächen geschehen, die unter e und g erwähnten Combinationen zusammen bilden auch eine Zuschärfung.

4) als 3fläch. Zusp. (aufg. a. d. Kt.) seiner Polecken . . . . stumpf. Rhomboëder (Fig. 152 r an 3 z),

5) als schiefe Abst. sein. Lateraleck. spitzere Rhomboëder (Fig. 151 4 r an 3 z),

6) als Zusch. seiner 3erlei Kanten 3erlei 3 und 3 Kantner (Fig. 153 3 z an 4 z, Fig. 152 5 z an 3 z),

7) als 6fläch. Zusp. seiner Polecken stumpf. 3 u. 3 Kantner (Fig. 156 t an r),

8) als Zusch. seiner Lateralecken spitzere 3 u. 3 Kantner.

§. 111. *Zonenverhältnisse des drei- und einachsigen Systemes.*

1) Horizontale Zone; Zonenachse (∞ c) mit den Flächen:

1) der I. 6seitigen Säule . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$

2) „ II. „ „ . . . . $\left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$

3) „ 12seitigen Säulen . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

2) Vertikale Zone der I. Säule; Zonenachse (∞ a)

1) die I. Säule . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$

2) alle Dihexaëder I. Ordnung . . . . $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$

3) die gerade Endfläche . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$

3) Vertikale Zone der II. Säule; Zonenachse (∞ s) oder (2 ma ; ma)

1) die II. Säule . . . . $\left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$

2) alle Dihexaëder II. Ordnung . . . . $\left(2a : \overset{\gamma c}{a} : 2a\right)$

3) die gerade Endfläche . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$

4) Vertikale Zonen der 12seitigen Prismen; Zonenachse $\left(a ; \frac{1}{n} a \; \frac{1}{n-1} a\right)$.

Es giebt deren so viele, als es 12seitige Prismen überhaupt giebt,

1) alle Sechs- und Sechskantner, deren n = dem n der Zonenachse, also alle, die die 3 Dimensionen a in demselben Verhältnisse schneiden $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1} a\right)$*)

2) die 12seitige Säule selbst . . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

3) die gerade Endfläche . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$

5) Endkantenzone des Dihexaëders I. Ordnung; Zonenachse (γc ; a).

Es gehören in dieselbe alle Flächen, die ein a und c in demselben Verhältnisse schneiden, also

1) das I. stumpfere Dihexaëder . . . . $\left(2a : \overset{\gamma c}{a} : 2a\right)$

2) das I. spitzere Dihexaëder . . . . . $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{2} a} : a\right)$

3) das Dihexaëder selbst . . . . $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$

4) die I. 6seitige Säule . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$

5) die spitz. 6 und 6 Kantner ($\frac{1}{n}$ ist $< \frac{1}{2}$) $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1}\right)$

6) die stumpf. 6 u. 6 Kantner ($\frac{1}{n}$ ist $> 1 < 2$) $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n} a} : \frac{1}{n-1} a\right)$.

6) Endkantenzone des Dihexaëders II. Ordnung; Zonenachse (s′; γc).

Sie kommt sehr selten vor. Es gehören in dieselbe dann dieselben Flächen, die sich zu diesem II. Ordnung so verhalten, wie die erwähnten Flächen aus der Kantenzone des Dihexaëders I. Ordnung zu diesem, also ebenfalls sein erstes spitzeres und stumpferes, die II. Säule u. s. f.

---

*) γ kann hier alle Werthe zwischen o und ∞ haben, die zwischen o und 1 fallenden bezeichnen stumpfere, die zwischen 1 und ∞ fallenden schärfere.

Die Kantenzonen des Dihexaëders I. Ordnung, deren es 6 giebt, sind oft ausserordentlich mächtig entwickelt, namentlich kommen aus ihnen eine grosse Menge von Sechs- und Sechskantnern vor, die zwischen der I. Säulenfläche und der Dihexaëderfläche über einander gelegen, diese, sich unter einander und die Dihexaëderfläche, welche mit dieser Säulenfläche in einem Ecke zusammenstösst, so wie, wenn sie vorhanden ist, die Fläche des I. spitzeren Dihexaëders in parallelen Kanten schneiden (wie Taf. XII, Fig. 137 die Flächen M, b, u, s, x, a). Aus dem Kantenwinkel, den eine solche Sechs- und Sechskantnerfläche mit der Dihexaëderfläche macht, können wir leicht die Werthe dieser Flächen finden. Denken wir uns alle diese Flächen durch die gemeinschaftliche Zonenachse, d. h. durch die Kante des Dihexaëders, die von γc, senkrecht auf C (Fig. LXXXVII) nach a geht, gelegt, so werden diese Flächen in der durch die Dimensionen a gelegten Ebene den Verlauf aα, aβ, aγ haben. Gegen die durch γc und Ca gelegte Ebene, welche den Kantenwinkel des Dihexaëders halbirt, werden sie Winkel bilden, deren Cosinuse für alle gleich als das Perpendikel aus C auf die von γc nach a laufende Kante angenommen werden kann und zu dem sich dann die Sinuse verhalten, wie die auf ihm und der durch γc und ac gelegten Ebene senkrechte Linie, die Dimension s, wie sie von den verschiedenen Flächen geschnitten wird, also bei gleichem Cosinus verhalten sich zu diesem die Sinuse wie die Linien Cα : Cβ : Cγ, diese Linien sind aber das $\frac{2\,s}{2\,n-1}$ der verschiedenen Sechs- und Sechskantner, aus denen wir den Werth für n finden können, wenn uns der Winkel gegen die Ebene durch a C, γc und das Dihexaëder selbst bekannt ist. Diesen Winkel finden wir aber leicht aus dem gemessenen Winkel, den das Dihexaëder mit einem Sechs- und Sechskantner macht. Es sei Fig. LXXXVIII der Durchschnitt durch den Mittelpunct des Körpers, die Dihe-

xaëder- und Sechs- und Sechskantnerfläche, x also der Winkel, den beide miteinander machen, der uns gegeben ist. Ist uns nun das Dihexaëder bekannt, so ist es auch sein Kantenwinkel, dessen Hälfte $= \measuredangle C\gamma s$ (Fig. LXXXVIII). Ziehen wir nun $\gamma\delta$ parallel $\gamma' s$, d. h. denken wir uns die Sechs- und Sechskantnerfläche durch die Kante (γc ; a) des Dihexaëders gelegt, wodurch das Verhältniss von sin : cos für ihren Winkel gegen die Ebene, welche den Kantenwinkel des Dihexaëders halbirt, wird wie $C\delta : C\gamma$, so ist $\measuredangle \delta\gamma s = \measuredangle sfs$, d. h. gleich dem Complement unseres gegebenen Winkels x zu 180°. Ziehen wir diesen Winkel $\delta\gamma s$ von dem halben Kantenwinkel des Dihexaëders $C\gamma s$ ab, so bleibt uns der Winkel $C\gamma\delta$, d. h. der Winkel des Sechs- und Sechskantners, für den sich verhält sin : cos $= C\delta : C\gamma$, während für den halben Kantenwinkel des Dihexaëders sin : cos $= sC : C\gamma$. Es verhalten sich daher die Sinuse dieser Winkel am Dihexaëder und Sechs- und Sechskantner wie $sC : \delta C = 2s : \frac{2s}{2n-1} = 1 : \frac{1}{2n-1} = 2n - 1 : 1$. Kennen wir nun das Dihexaëder, so kennen wir auch sein $2s$ und wenn wir $C\delta$ auf die erwähnte Weise gefunden, so können wir daraus leicht den Werth für n, damit aber den Sechs- und Sechskantner berechnen.

Zonenverhältnisse der hemiedrischen Formen.

1) Horizontale Zone; Zonenachse (∞c).

Hierher gehören dieselben Flächen, wie sie in der horizontalen Zone der homoëdrischen Gestalten erscheinen.

2) Vertikale Zone der I. 6seitigen Säule; Zonenachse (∞a) mit

1) der I. 6seitigen Säule . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$

2) allen Rhomboëdern I. Ordnung (γ fällt zwischen o und ∞) . . . . $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$

3) der geraden Endfläche . . . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$

4) allen Rhomboëdern II. Ordnung . . $\left(a' : \overset{\gamma c}{a'} : \infty a\right)$

3) Vertikale Zone der II. 6seitigen Säule; Zonenachse (∞s) oder ($2\,ma$; ma):

1) die II. 6seitige Säule . . . . $\left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$

2) die gerade Endfläche . . . . $\left(\infty a : \overset{\gamma c}{\infty a} : \infty a\right)$

4) Vertikale Zonen der 12seitigen Säule; Zonenachse ($a : \frac{1}{n} a$):

1) die 12seitige Säule selbst . . . . . $\left(a : \frac{1}{n} \overset{\infty c}{a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

2) alle 3 und 3 Kantner, deren n = dem der Säule, wobei γ alle Werthe zwischen o und ∞ haben kann $\frac{1}{2}\left(a : \frac{1}{n} \overset{\gamma c}{a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

3) die gerade Endfläche . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$

5) Kantenzonen der Rhomboëder*); Zonenachse (γc ; $2s$):

1) das I. stumpfere von jedem . . . . $\left(2a : \overset{\gamma c}{2a} : \infty a\right)$

2) die Endkanten 3 und 3 Kantner II. Abtheil., deren $(2n-1)\gamma c = \gamma c$ des Rhomboëders ist (cfr. p. 318) $\left(a : \frac{1}{n} \overset{\gamma c}{a} : \frac{1}{n-1} a\right)$

3) die Endkanten 3 und 3 Kantner III. Abth., bei deren $(n+1)\gamma c = \gamma c$ des Rhomboëders (pag. 318) ————————

4) die Lateralkanten 3 und 3 Kantner I. Abth., bei denen $(n-2)\gamma c = \gamma c$ des Rhomboëders ist (pag. 316) ————————

5) die Rhomboëderflächen selbst . . . $\left(a : \overset{\gamma c}{a} : \infty a\right)$

6) die Fläche der II. 6seitigen Säule $\left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$

*) Da die Lateralkanten des Rhomboëders parallel seinen Endkanten laufen, braucht man keinen Unterschied zwischen End- und Lateralkantenzonen zu machen.

Von der Berechnung der Gestalten des drei- und einachsigen Systemes.

Auch hier ist es zunächst die Aufgabe das Verhältniss der Dimensionen a und c zu einander zu finden. Man berechnet dieses am leichtesten aus dem Endkantenwinkel des Dihexaëders nach der für denselben angegebenen Formel. Auch hier lassen sich die Verhältnisse nach **Weiss** am schicklichsten in Quadratwurzelgrössen ausdrücken, wenn man schon nicht mit derselben Sicherheit, wie bei dem regulären Systeme die Richtigkeit desselben verbürgen kann, indem man nie, auch bei der genauesten Messung nicht, kleinen Fehlern entgehen wird, und daher zwischen verschiedenen Werthen, die einander sehr nahe liegen, in der Wahl schwanken kann. Wir wissen ferner, dass allerlei physikalische und chemische Kräfte verändernd auf die sonst so unveränderlichen Krystallwinkel einwirken. Die Wärme z. B. dehnt die Krystalle, welche nicht zum regulären Systeme gehören, ungleichartig, verschieden in der Richtung der verschiedenen Achsen aus; eine oft sehr geringe Beimischung eines fremden Stoffes ändert oft auffallend rasch die Winkel eines Krystalles, so ein Gehalt an kohlensaurem Eisenoxydul oder Bittererde die Winkel des Kalkspathes u. s. f. Genug andere Verhältnisse mögen noch vorhanden sein, die auf eine krystallisirende Substanz einwirken, ohne dass wir es wissen oder erklären können. Können wir es für einen Zufall halten oder können wir es erklären, dass Krystalle eines Fundortes immer und immer gewisse Fläche haben, die anderen anderswo entstandenen constant fehlen und umgekehrt, ja dass selbst die räumliche übermässige Ausdehnung, das Vorherrschen gewisser Flächen die Regel ist bei Krystallen, die aus einer Gegend kommen, während man an anderen dieses nicht bemerkt? Die Quarze verschiedener Gegenden, die Kalkspäthe liefern hiefür die besten Beispiele.

Man wird daher gewiss nicht Unrecht thun, wenn man mit Weiss *) nicht allzuängstlich an die eigene Beobachtung und Messung sich hält, und ihr zu liebe die schönen Verhältnisse, die eine geringe Abweichung von den gefundenen Winkeln uns erkennen lässt, als unrichtig bezeichnet, sondern selbst trotz dem, dass nicht immer die Messung mit der geometrischen Bestimmung übereintrifft, lieber das einfache Verhältniss beibehält, als ein höchst complicirtes, wenn es auch der Messung näher kommt.

Von der grössten Wichtigkeit ist es oft, sowohl bei Dihexaëdern, als Rhomboëdern aus gemessenen Endkantenwinkeln ihre Neigungswinkel gegen die Achse, d. h. also ihr Verhältniss von s : c zu finden und aus den Kantenwinkeln des Dihexaëders den des zugehörigen Rhomboëders und umgekehrt zu berechnen. Die Formeln hiefür sind höchst einfach **).

Nennen wir die Neigung der Fläche des Dihexaëders und Rhomboëders gegen die Achse c α, den halben Neigungswinkel in der Endkante beim Rhomboëder γ, beim Dihexaëder Γ, so ist

$\sin\alpha : \cos\alpha : \text{rad}\,\alpha = s : c : r$ (wo $r = \sqrt{s^2 + c^2}$) cfr. p. 300

$\sin\gamma : \cos\gamma : \text{rad}\,\gamma = m : c\sqrt{3} : 2r$ (wo $m = \sqrt{4s^2 + c^2}$) cfr. p. 301

$\sin\Gamma : \cos\Gamma : \text{rad}\,\Gamma = m'\sqrt{3} : c : 2r$ (wo $m = \sqrt{\frac{4}{3}s^2 + c^2}$) cfr. pag. 284 u. 85,

daraus findet man, wenn α gegeben ist oder γ,

$$\text{rad}\,\gamma : \cos\gamma = 2r : c\sqrt{3} = 2\,\text{rad}\,\alpha : \cos\alpha\sqrt{3}$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha \,.\, \sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad \cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \cos\gamma \,.\, \sqrt{\tfrac{4}{3}}$$

*) cfr. Weiss. Ueber die dem Kalkspathrhomboëder in den Winkeln nahe kommenden Rhomboëder. Abh. d. Ac. d. W. zu Berl. 1820 — 21 und

Weiss. Ueber die Verhältnisse in den Dimensionen der Krystallsysteme etc., eod. 1825.

**) cfr. Weiss: Ueber die dem Kalkspathrhomboëder in den Winkeln nahe kommenden Rhomboëdern. Abh. d. Berl. Ac. d. Wiss. Jahr 1820 — 21.

oder aus α oder Γ, da

$$\text{rad}\,\Gamma : \cos\Gamma = 2r : c = 2\,\text{rad}\,\alpha : \cos\alpha$$

$$\cos\Gamma = \frac{\cos\alpha}{2} \quad \cos\alpha = 2\cos\Gamma$$

oder aus γ oder Γ, da

$$\text{rad}\,\Gamma : \cos\Gamma = 2r : c = \text{rad}\,\gamma : \cos\gamma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$\cos\Gamma = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{3}} \quad \cos\gamma = \cos\Gamma\sqrt{3}.$$

Was die Berechnung der übrigen Verhältnisse betrifft, so sind in dem vorhergehenden schon grösstentheils die Wege angegeben, wie man die Werthe der verschiedenen Flächen aus den Combinationskantenwinkeln findet. Was die verschiedenen Dihexaëder I. Ordnung betrifft, so kann uns Fig. LXXXVIII dazu dienen, anschaulich zu machen, wie man die Werthe für sie im Verhältnisse zu dem gegebenen findet, indem, wenn x der Winkel ist, den 2 Dihexaëderflächen gleicher Ordnung miteinander bilden und uns das Dihexaëder γs bekannt ist, also das Verhältniss von s : c bei ihm = Cs : Cγ, das Verhältniss des anderen ist s′ : c′ = Cδ : Cγ. Auf welche Weise man den Winkel C$\gamma\delta$ aus dem Winkel x findet, wurde pag. 336 schon erwähnt. Sind es Dihexaëder II. Ordnung, so bekommt man das Verhältniss von a : c ganz auf dieselbe Weise, wie bei den Dihexaëdern I. Ordnung aus dem Winkel x das Verhältniss von s : c.

Ebenso einfach findet man alle Sechs- und Sechskantner, die zur Kantenzone eines bekannten Dihexaëders gehören, aus dem Winkel, den sie mit der Fläche desselben machen auf die pag. 336 angegebene Weise, überhaupt ebenso alle Flächen, welche zur Kantenzone einer bestimmten und gekannten Fläche gehören, indem die Fig. LXXXVIII für alle dergleichen Fälle dienen kann, und man immer den $\measuredangle$ $\delta\gamma$C für die unbekannte Fläche, d. h. den Kantenwinkel, den sie mit einer anderen ihres gleichen bildet, findet, woraus sich nach den für die verschiedenen Kanten der einfachen Ge-

stalten angegebenen Formeln die Werthe der Fläche im Verhältniss zu der gegebenen als Grundgestalt berechnen lassen.

In den meisten Fällen wird auch in diesem Systeme die Betrachtung der Zonenverhältnisse uns oft über den Werth einer Fläche unmittelbaren Aufschluss geben, oder uns wenigstens nur zu einer Messung nöthigen. Haben wir es aber mit einer Fläche zu thun, die in keiner bekannten Zone liegt, so brauchen wir auch hier wenigstens 2 Messungen von 2 ihrer Combinationskanten, um daraus ihre Werthe zu finden.

Wir könnten uns auch hier der pag. 149 angegebenen allgemeinen Formel bedienen; indem wir dann die Fläche als durch γc, $1a$ und das auf dieser Dimension a senkrechte s als die 3 rechtwinkligen Achsen a, b, c gelegt annehmen können, woraus wir wieder die Werthe für die beiden andern Dimensionen a berechnen könnten. Rascher kommt man zum Ziele, mit Annahme eines schiefwinkligen Achsensystems, nehmlich a' a und γc, also eines, wovon 2 Achsen sich unter einem Winkel von 60° schneiden, während die dritte senkrecht auf ihnen steht. Man findet dann mit Hülfe der analytischen Geometrie auf ähnliche Weise wie für 3 rechtwinklige Achsen, ganz allgemein für den Combinationskantenwinkel zweier Flächen, wenn wir statt a, b, c und a', b', c', wo a und a' die Hauptachse, unser bisheriges c bedeuten, hier m, n, r und m', n', r' setzen, für den Kantenwinkel W.

$$\text{Cos}\, W = -\frac{2mm'(nn'+2rr-n'r-nr')+3nrn'r'}{\sqrt{4m^2(n^2-nr+r^2)+3n^2r^2}\,\sqrt{4m'^2(n'^2-n'r'+r'^2)+3n'^2r'^2}}.$$

Man findet daraus die in dem Anhange angegebenen Formeln für die verschiedenen Combinationskanten, wenn man in diese Formel die entsprechenden Buchstaben der Achsen (zweier Dimensionen a und c) einsetzt, woraus sich die Werthe der Flächen berechnen lassen.

In den meisten Fällen wird man jedoch nicht nöthig haben, sich dieser Formeln zu bedienen, indem man ent-

weder Kantenwinkel, welche 2 Flächen einer einfachen Gestalt miteinander bilden, unmittelbar messen kann, oder den Kantenwinkel, welchen sie mit einer anderen Fläche bildet, dessen Kante einer bekannten Zone angehört. Wir wollen dies an einigen Beispielen auch für dieses System betrachten.

§. 112. *Combination des Apatites.*

Taf. XII, Fig. 136 und 137 *).

Wir sehen aus Fig. 136 unmittelbar, dass wir hier die 2 6seitigen Säulen als die Flächen M und e vor uns haben. Nehmen wir M als die erste Säule, so werden die Flächen z, x, r als Flächen der I. vertikalen Zone Dihexaëder I. Ordnung, die Flächen d, s, a als zur II. vertikalen Zone gehörig Dihexaëder II. Ordnung. Die Fläche P ist die gerade Endfläche, die Flächen u und b (Fig. 137) als zwischen der Säulenfläche und der an einem Ecke mit ihr zusammenstossenden Dihexaëderfläche x gelegen, sind jedenfalls (pag. 332) Sechs- und Sechskantnerflächen, und zwar erscheinen sie nur zur Hälfte. Da sie aber oben und unten an derselben Säulenfläche erscheinen, würden sich die oberen und unteren in horizontalen Kanten schneiden, also ein Dihexaëder von abnormer Flächenstellung bilden, dessen Lage durch die Projection der Flächen auf Taf. XII sich als ähnlich wie die der gedrehten Rhomboëder zu erkennen giebt.

Alle diese verschiedenen Flächen nun lassen sich blos durch die Betrachtung der Zonen, welchen sie angehören, in ihren Werthen ohne alle Messung mit Sicherheit bestimmen. Nehmen wir die Fläche x als die dem Grunddihexaëder angehörige, also als $\left(a : a \overset{c}{:} \infty a\right)$, so ergiebt sich unmittelbar aus dem Parallelismus der beiden Kanten von a mit den beiden

*) Fig. 136 a die sämmtliche Flächen von oben betrachtet zeigt, giebt die Zonenverhältnisse der verschiedenen Flächen am deutlichsten.

dasselbe begränzenden Flächen x, dass a die gerade Abstumpfung der Kante zwischen x und x, d. h. das I. stumpfere Dihexaëder von x aus sei, also a = $\left(2a : \overset{c}{a} : 2a\right)$. Ferner sehen wir, dass die Fläche s in eine Zone gehört mit dem ihm zur rechten gelegenen x und a, ebenso auch mit dem ihm zur linken gelegenen x und a, indem die Kanten zwischen s und x parallel den zwischen x und a sind. Es gehört also in 2 Kantenzonen des Grunddihexaëders x, muss also das erste und das dritte a durch c gelegt in der Einheit schneiden, da (c ; a) die Kante des Dihexaëders ist. Verbinden wir daher eine Dimension a mit dem dritten a, beide in der Einheit genommen durch eine gerade Linie, z. B. die Puncte α und β (Taf. XII), so giebt uns diese den Verlauf unserer Fläche und den Werth für das dritte a. Wir sehen daraus, dass die Fläche s = $\left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{2}a} : a\right)$, d. h. unser erstes spitzeres Dihexaëder wird. Die Fläche s aber bildet mit den 2 zu seinen beiden Seiten gelegenen Flächen z parallele Kanten, stumpft also die Kante zwischen z und z ab, s ist also das erste stumpfere von z, dieses das erste spitzere von s, also = $\left(\tfrac{1}{4}a : \overset{c}{\tfrac{1}{4}a} : \infty a\right)$.

Ferner sehen wir, dass die Kante zwischen 2 Flächen r parallel ist der, welche zwischen r und dem auf der andern Seite der Fläche r liegenden a entsteht, mit andern Worten, dass a in 2 Kantenzonen von 2 Flächen r gehöre, d. h. dass a sich zu r verhalte wie s : x, sein erstes spitzeres Dihexaëder sei. Ist nun a = $\left(2a : \overset{c}{a} : 2a\right)$, so ist r als sein erstes stumpferes = $\left(2a : \overset{c}{2a} : \infty a\right)$. Ebenso finden wir aber auch die Werthe der Flächen u und b. Aus dem Parallelismus der Kanten zwischen M, b, u, s, x, a sehen wir, dass b und u in die Kantenzone des Dihexaëders x gehören, also das Verhältniss von a : c haben müssen, ebenso sehen wir aber auch, dass u in eine Zone mit z und M und auch in eine mit x und e

gehört. Unsere Fläche M' durch c gelegt wird mit der Dimension a zusammenfallen, und zwar die die Kante $\lambda\beta$ abstumpfende in die Linie M' M', wenn die Dihexaëderkante, der die Fläche u und b parallel gehen von c nach α Taf. XII läuft, und die Fläche e' als II. Säulenfläche mit der Dimension s.($\iota\eta e'$); ziehen wir nun von $\alpha = 1a$ eine Linie nach dem Durchschnittspuncte von z und M, $\varkappa$ der Figur oder x und e, ι der Figur, so finden wir daraus den Werth der beiden übrigen Dimensionen a. In den ähnlichen Dreiecken $C\gamma\alpha$ und $\lambda\gamma\iota$ ist nehmlich $C\gamma : \gamma\lambda = C\alpha : \iota\lambda$, $\iota\lambda$ ist aber $= 2C\alpha = 2a$, also $C\gamma : \gamma\lambda = 1 : 2$, $C\gamma = \frac{1}{3} C\lambda = \frac{1}{3} a$ $C\gamma$, d. h. unser $\frac{1}{n}$a des Sechs- und Sechskantners ist $= \frac{1}{3}$, das 3te a $= \frac{1}{n-1}$ wird daher $= \frac{1}{2}$, also $u = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}\right)\frac{l}{r}$ *). Ganz dasselbe hätten wir auch gefunden, wenn wir $Cn = \frac{n}{n-1}a$ berechnet hätten, es ist nehmlich $\triangle\ C\varkappa\alpha \backsim \beta di$, also $C\alpha : \beta i = C\varkappa : \varkappa\beta$, da $C\alpha = \beta\iota = a$, so ist $C\varkappa = \varkappa\beta = \frac{1}{2}a$, also $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{2}$, $n = 3$, wie oben. Wenn man z. B. zweifelhaft ist, ob wirklich eine Fläche in 2 solcher Zonen gehört, so kann man sich auf diese Weise immer überzeugen, ob man sich, wie dies namentlich bei kurzen Kanten möglich ist, nicht getäuscht habe, ob wirklich ein Parallelismus Statt findet, wie auch bei der graphischen Darstellung der Flächen, ob nicht nur durch eine ungenaue Zeichnung Flächen in einem Puncte sich schneidend, d. h. zu einer Zone gehörig, dargestellt wurden. Aus dem Parallelismus der Kanten zwischen z, b, e findet sich, wenn wir wieder eine Linie von α, dem

*) $\frac{l}{r}$ bedeutet, dass der Körper ein Dihexaëder von abnormer Flächenstellung, kein Drei- und Dreikantner sei und dass er so gestellt sei, dass oben die linke Fläche der den Sechs- und Sechskantner bildenden Zuschärfungsflächen des Eckes allein vorhanden sei, in umgekehrter Stellung die rechte.

Endpuncte unserer Kantenzone nach dem andern, dem Durchschnittspuncte von z und e' ziehen, der Werth für $C\zeta = \frac{1}{n}a$ auf folgende Weise. Es ist wieder $\triangle\ C\zeta\alpha \backsim \vartheta\zeta\eta$, also $C\zeta : \zeta\vartheta = C\alpha : \eta\vartheta$, $C\alpha$ ist aber $= \eta\vartheta = 1\,a$, also $C\zeta = \zeta\vartheta = \frac{1}{2}\,C\vartheta = \frac{1}{4}\,a$, also ist $n = 4$ und b wird $= \frac{1}{2}\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{4}}:\tfrac{1}{3}a\right)\frac{l}{r}$.

Wir haben also ohne alle Messung diese verschiedenen Flächen bestimmen können, die sich nach folgenden Zonen vertheilen:

1) I. vertikale Zone mit den Flächen

$$P=\left(\infty a:\overset{c}{\infty a}:\infty a\right),\ r=\left(2a:\overset{c}{2a}:\infty a\right),\ x=\left(a:\overset{c}{a}:\infty a\right)$$
$$z=\left(\tfrac{1}{2}a:\overset{c}{\tfrac{1}{2}a}:\infty a\right),\ M=\left(a:\overset{\infty c}{a}:\infty a\right),$$

2) II. vertikale Zone mit den Flächen

$$P=\left(\infty a:\overset{c}{\infty a}:\infty a\right),\ a=\left(2a:\overset{c}{a}:2a\right),\ s=\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{2}a}:a\right)$$
$$d=\left(\tfrac{1}{2}a:\overset{c}{\tfrac{1}{4}a}:\tfrac{1}{2}a\right),\ e=\left(2a:\overset{\infty c}{a}:2a\right),$$

3) III. die horizontale Zone mit den Flächen

$$M=\left(a:\overset{\infty c}{a}:\infty a\right),\ e=\left(2a:\overset{\infty c}{a}:2a\right).$$

4) Kantenzone des Dihexaëders x mit den Flächen

$$a=\left(2a:\overset{c}{a}:2a\right),\ x=\left(a:\overset{c}{a}:\infty a\right),\ s=\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{2}a}:a\right)$$
$$u=\tfrac{1}{2}\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{3}a}:\tfrac{1}{2}a\right)\frac{l}{r},\ b=\tfrac{1}{2}\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{4}a}:\tfrac{1}{3}a\right)\frac{l}{r},\ M=\left(a:\overset{\infty c}{a}:\infty a\right).$$

5) Kantenzone des Dihexaëders z mit den Flächen

$$s=\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{2}a}:a\right)\ z=\left(\tfrac{1}{2}a:\overset{c}{\tfrac{1}{2}a}:\infty a\right)\ d=\left(\tfrac{1}{2}a:\overset{c}{\tfrac{1}{4}a}:\tfrac{1}{2}a\right)$$
$$u=\tfrac{1}{2}\left(a:\overset{c}{\tfrac{1}{3}a}:\tfrac{1}{2}a\right)\frac{l}{r},\ M=\left(a:\overset{\infty c}{a}:\infty a\right).$$

Noch andere Zonen, die sich in der Zeichnung des Körpers nicht erkennen lassen, werden bei unserer Darstellung Taf. XII klar; eine weitere Betrachtung derselben aber ist hier überflüssig.

§. 113. *Rhomboëdrische Combination des Kalkspathes.* Taf. XIII, Fig. 156 und 156 a.

Gehen wir von dem Rhomboëder P, das in der Natur leicht an dem so vollkommenen blättrigen Bruche, der parallel allen Flächen desselben geht, zu erkennen ist, als Grundrhomboëder aus, so sehen wir aus der Fig. 156 unmittelbar, dass c die Fläche der I. 6seitigen Säule $= \left(\overset{\infty c}{a : a : \infty a}\right)$, ferner, dass g, f, q 3 Rhomboëder II. Ordnung aus der I. vertikalen Zone (pag. 336) sind, und die Flächen t und r 2 verschiedenen Drei- und Dreikantnern angehören.

g bestimmt sich sogleich als das I. stumpfere Rhomboëder, da es die Endkante zwischen 2 Flächen P gerade abstumpft, also ist $g = \left(\overset{c}{2a' : 2a' : \infty a}\right)$.

Misst man den Winkel von f gegen die Säule c, so giebt uns das Complement dieses Winkels zu 180° den Neigungswinkel der Fläche f gegen die durch die 3 Dimensionen a gelegte Fläche, die Basis. Man findet auf diese Weise, dass die tg, d. h. $\frac{\sin}{\cos}$ dieses Winkels doppelt so gross ist, als die des Winkels von P gegen die Basis. Für P ist diese $tg = \frac{c}{s}$, für f also gleich $\frac{2c}{s}$, die Fläche wird also durch 1 c gelegt $\frac{1}{2}s$ schneiden, also $f = \left(\overset{c}{s : \frac{1}{2}s : s}\right) = \left(\overset{c}{\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}a' : \infty a}\right)$.

Der Drei- und Dreikantner r gehört mit g, t und P in eine Zone, nehmlich in die Kantenzone des Grundrhomboëders P, zugleich aber auch in die Diagonalzone von f, da f seine scharfen Polkanten gerade abstumpft. Die Kante des Grundrhomboëders läuft von c nach 1 a, nach α Taf. XIII. Ziehen wir nun durch den Endpunct der Diagonale von f, durch welche unsere durch c und α gelegte Fläche noch gehen muss, d. h. durch den Punct β eine gerade Linie, so giebt uns

diese den Verlauf unserer Fläche r. $C\beta$ ist aber (pag. 308) unser $\frac{2s}{n+1}$ für den Drei- und Dreikantner r und $= \frac{1}{2}s$ des Grundrhomboëders, daraus finden wir $\frac{2s}{n+1} = \frac{1}{2}s$ $4 = n+1$, $n = 3$, unser Drei- und Dreikantner wird also $r = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}\right)$, der gewöhnlichste Drei- und Dreikantner des Kalkspathes. Der Drei- und Dreikantner t gehört erstens in die Kantenzone von P, zugleich sehen wir, dass er mit r eine horizontale Kante bildet, d. h. also, dass er die Nebenachsen in demselben Verhältnisse untereinander schneidet wie r; ziehen wir nun von α, dem Endpuncte der Kantenzone des Hauptrhomboëders eine Linie parallel derjenigen, welche unsere Fläche r auf unserer Projectionsebene bildet, welche ja auch einen horizontalen Durchschnitt durch r, also parallel der horizontalen Combinationskante zwischen t und r darstellt, so erhalten wir daraus den Werth für t $= \left(\frac{c}{4a : \frac{4}{3}a : 2a}\right) = \left(\frac{\frac{1}{4}c}{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a}\right)$, indem $C\gamma : C\delta = C\eta : C\vartheta$ $= C\varepsilon : C\alpha = \frac{1}{2}s : 2s = 1 : 4$, also wird $C\delta$, da $Cg = \frac{1}{3}a$ $= \frac{4}{3}a$, $C\vartheta = 4a$.

Das Rhomboëder φ bildet mit t Kanten, welche den stumpfen Polkanten x desselben parallel sind, ist also das Rhomboëder der stumpfen Polkanten desselben; dieses ist stets nach pag. 315 das Rhomboëder $\left(\frac{(2n-1)\gamma c}{a : a : \infty a}\right)$ von seinem Drei- und Dreikantner. n ist bei dem Drei- und Dreikantner $t = 3$ und $\gamma = \frac{1}{4}$, also wird unser Rhomboëder $\varphi = \left(\frac{\frac{5}{4}c}{a : a : \infty a}\right)$ $= \left(\frac{c}{\frac{4}{5}a' : \frac{4}{5}a' : \infty a}\right)$.

Für das Grundrhomboëder des Kalkspaths ist der Endkantenwinkel = 105,5. Nach den pag. 339 angegebenen Formeln suchen wir z. B. die Neigung der Fläche gegen die

Achse; also das Verhältniss von s : c. Es ist uns also $\gamma = \frac{105,5}{2}$ gegeben, wir suchen daraus α.

$$\text{Nun ist } \log \cos \frac{105,5}{2} = 9,7841901$$

$$+ \log \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{0,0624693}{9,8466594} = \lg \cos 45^0\, 21'\, 46''.$$

Wäre der Winkel α genau 45°, so wäre das Verhältniss von s : c = 1 : 1, wie es von Haüy angenommen wird. Man kann mit Weiss unter diesen Umständen annehmen, das ein das reine Verhältniss störender äusserer, der Krystallisationskraft der Kalkspathsubstanz fremder Einfluss sich geltend gemacht habe. Es lässt sich dann berechnen, wie gross dieser Einfluss im Verhältniss zur reinen Krystallisationskraft sei. Es ist nehmlich für den obigen Winkel das Verhältniss ziemlich genau $= \sqrt{37} : \sqrt{36}$, so dass sich also dieses Verhältniss so ausdrücken liesse $= \sqrt{1 + \frac{1}{36}} : \sqrt{1}$.

Von der Unregelmässigkeit in der Ausbildung der Krystalle und den Zwillingsbildungen.

§. 114. In der Weise, wie wir unsere Krystallmodelle darstellen, dass eine Fläche mit der ihr gleichen ganz dieselbe Grösse und Beschaffenheit habe, kommen in der Natur die Krystalle nur sehr selten vor. Meistens zeigen sie Abweichungen von der regelmässigen Gestalt unserer Modelle, jedoch nur, was die räumliche Ausdehnung einer Fläche betrifft. Die Symmetrie derselben, die Lage derselben gegen einander und gegen den Mittelpunct, die Winkel, welche sie miteinander machen, bleiben aber immer ganz dieselben, wie wir sie im vorhergehenden der Berechnung unterworfen haben; von allen den gefundenen Gesetzen findet auch nicht die mindeste Abweichung in der Natur Statt.

In der Natur sind höchst selten die Bedingungen dazu gegeben, die wir künstlich hervorbringen können, damit ein Krystall von allen Seiten vollkommen sich ausbilden könne. Es setzt dieses immer eine Nachgiebigkeit, eine Beweglichkeit der ihn umgebenden Massen voraus, wie z. B. die Theile einer Flüssigkeit sind, aus welcher eine aufgelöste Substanz herauskrystallisirt, und setzt Raum genug voraus, dass der Krystall seine Glieder nach allen Seiten hin unbeengt ausbilden könne. Zu beidem ist in der Natur selten Gelegenheit gegeben, daher die Krystalle auch meistens nur einen Theil ihrer Gestalt entwickeln konnten, indem entweder die Unterlage, auf welcher, oder die Wände des Gefässes, z. B. einer Höhlung, in welcher die anfangs amorphe Masse eines Krystalls zu krystallisiren anfing, unnachgiebig dem Wachsen des Krystalles nach dieser Seite hin ein Hinderniss bereitete, oder auch indem in einem Raume gleichzeitig eine so grosse Menge einzelner Individuen sich zu bilden anfing, dass eines das andere beschränkte und wenige oder keines auch nur einen Theil seiner Gestalt frei und vollkommen entwickeln konnte. In den sogenannten krystallinischen Gebirgsarten, dem Granite, dem Marmor u. s. w. ist dieses Verhältniss der Grund, warum so selten in ihm selbst nur theilweise natürliche Begränzungsflächen darbietende Individuen angetroffen werden. In minder hohem Grade ist dieses gegenseitige Stören in der Ausbildung fast bei allen Krystallbildungen zu bemerken. Der Stoff, aus welchem sich dieselben bildeten, ist natürlich selten so sparsam an einem Puncte vertheilt, dass sich nur ein einziges Individuum aus ihm zu entwickeln angefangen hätte, und so finden wir denn meistens neben einem Individuum mehrere andere, die mehr oder weniger sich gegenseitig in der Entwicklung gehemmt haben. Wird immer mehr Material zugeführt, wachsen die Krystalle weiter, oder bilden sich zwischen ihnen wieder neue, so entstehen dadurch Krystallgruppen, an denen zuletzt die In-

dividuen ganz zusammenstossen und nur die äussersten Glieder derselben frei ausgebildet erscheinen. Durch das Fortwachsen der Krystalle können so bis zu einem bestimmten Zeitpuncte ihrer Bildung freie Individuen allmählich zu einer scheinbar ganz unregelmässigen Masse verwachsen; ebenso wird aber auch durch das Fortwachsen eines Individuums oft eine Unregelmässigkeit in der Gestalt dieses einen bedingt. Es sind z. B. die Bedingungen so geworden, dass einer Seite des Krystalles, z. B. wenn er in einer Höhlung von der Decke herab hängt, durch das einsickernde Wasser mehr Material zugeführt wird, als der andern; dann wird diese natürlich sich verhältnissmässig mehr entwickeln, als die andere, und daraus lassen sich — wenn auch nur zum Theil — die ungleichmässigen Ausdehnungen der gleichwerthigen Flächen erklären.

Ausser diesen auf rein mechanischen, äusserlichen Verhältnissen beruhenden und durch sie in ihrer Gestalt bestimmten regellosen Verwachsungen und Durcheinanderwachsungen der Krystalle kommen jedoch auch solche vor, die mit zu den Geheimnissen der Krystallkraft gehören, indem sie nur von dieser allein abhängig sind und durch sie hervorgebracht werden. Diese nach ganz bestimmten Gesetzen erfolgenden regelmässigen Verwachsungen hat man unter dem Namen der „Zwillingsbildung" von den zufälligen unterschieden. Man bemerkt nehmlich bei sehr vielen Krystallen und bei gewissen Mineralspecies constant, dass in einer bestimmten Weise 2 oder selbst mehrere Individuen ein und derselben Species miteinander gleichsam ein Individuum ausmachen, den Raum und die Masse so unter sich getheilt haben, dass sie den grösseren oder kleineren Theil derselben gemeinschaftlich besitzen, dass sie von beiden in Anspruch genommen wird, so dass sich durchaus nicht entscheiden lässt, wem von beiden sie eigentlich zukomme. Von der eigentlichen Zwillingsbildung, die meist mit einer

Durcheinanderwachsung verbunden ist, kann man noch die regelmässige Aneinanderwachsung zweier oder vieler Individuen unterscheiden. Letztere ist immer so, dass die Individuen parallel einer Kante, einer Fläche zusammengefügt sind, wobei die Achsen eines Individuums in gleicher Lage zu dieser ihrer Gränze sich befinden, wie die des anderen. Bei der eigentlichen Zwillingsbildung ist dieses anders. Hier haben die gleichen Flächen beider Individuen nicht mehr dieselbe Lage, sondern sie liegen umgekehrt, ihre Achsen mehr oder weniger gegen einander verdreht und haben nur eine Linie und die auf dieser Linie senkrechte Fläche beide in gleicher Lage.

Diese Linie oder Fläche nun, welche 2 oder mehreren Individuen gemeinschaftlich ist, ist jederzeit eine wirklich vorhandene oder wenigstens krystallographisch mögliche. Man nennt sie im ersteren Falle die Zwillingsachse, oder wenn es eine Fläche ist, die Zwillingsebene. In Beziehung auf die Erscheinung der übrigen Flächen nun sind zweierlei Formen zu unterscheiden. Sie sind nehmlich bei der einen Art in der Weise und mit den Theilen ausgebildet, dass wenn wir uns beide Individuen im Gleichgewicht der Ausbildung und das eine gegen das andere um die beiden gemeinschaftliche Zwillingsachse 180° gedreht denken, von ihnen ein vollkommenes Individuum gebildet würde, dass sie sich also zu einander verhalten, wie rechte und linke oder obere und untere oder vordere und hintere Hälfte eines einfachen Krystalles, z. B. Taf. IX, Fig. 110 ein Augitzwilling. Bei der andern Art ist dieses nicht der Fall; seien auch beide Individuen ganz im Gleichgewicht der Ausbildung, so dürfen wir sie uns gedreht denken, wie wir wollen, sie werden nie das Ansehen eines Individuums bekommen. Die letzteren sind seltener, erkennbar wenigstens nur bei Gestalten, die eine hemiedrische oder tetartoëdrische Ausbildung in der Entwicklung von Flächen erkennen lassen; sie ver-

halten sich nehmlich wie 2 rechte oder 2 linke Hälften eines symmetrischen Individuums gegen einander, die nie zusammen ein Ganzes bilden können. An solchen Zwillingen — wie die Fig. 111 dargestellten Feldspathe von Karlsbad — kann man daher auch rechte und linke Zwillinge unterscheiden, je nachdem es nehmlich 2 rechte oder 2 linke Hälften eines einfachen Krystalles sind, welche hier zusammengewachsen erscheinen.

Diese Zwillingsbildung nun wiederholt sich manchmal oft nacheinander, ein Individuum ist mit einem andern zusammengewachsen, dieses gerade so wieder mit einem andern und so geht es fort.

Sind 2 Individuen miteinander parallel einer Fläche verwachsen, so werden die gegen diese Fläche geneigten Flächen beider Individuen von dieser aus nach beiden Seiten divergiren, d. h. einen sg. einspringenden Winkel miteinander bilden, wie Fig. 113 die Flächen l und l′ an einem Feldspathzwilling von Baveno. Bei einfachen Individuen kommen nie dergleichen vor, wo wir daher einen solchen einspringenden Winkel finden, haben wir es mit einer Zwillingsbildung zu thun, doch ist es nicht immer nöthig, dass sie vorhanden sind. Sind z. B. die Individuen so weit in einander gewachsen, dass die den einspringenden Winkel bildenden Flächen aus der Begränzung verschwinden, so sehen wir keine einspringenden Winkel. Hier ist es die gegenseitige Lage der Flächen der 2 Individuen, verglichen mit dem Symmetriegesetze, das dem Krystallsysteme, zu dem sie gehören, zukommt, wie es an den einfachen Individuen erscheint oder erscheinen müsste, nebst anderen physikalischen Kennzeichen, z. B. des blättrigen Bruches u. dgl., die uns erkennen lassen, ob wir es mit einem Zwillinge zu thun haben. So zeigen die Fig. 113 dargestellten Feldspathzwillinge von Baveno oft den einspringenden Winkel der Flächen nicht, und haben dann das Fig. 112 dargestellte Aussehen.

Wiederholt sich die Zwillingsbildung sehr oft, werden die einzelnen Individuen sehr schmal, so verschwinden die einspringenden Winkel oft fast vollkommen, und nur als Andeutung derselben bleibt eine feine Streifung auf der Oberfläche der Krystalle zurück. Bei vielen Krystallen ist diese Erscheinungsweise die Regel, selten kommt bei ihnen dann eine stark und deutlich ausgeprägte Zwillingsbildung vor.

Ueber die Zwillings-Achsen und- Ebenen selbst lässt sich kein allgemeines Gesetz aufstellen, als das oben erwähnte, dass es immer eine krystallographisch mögliche Fläche ist, welche beide Individuen gemeinschaftlich haben, bald ist diese Ebene der Hauptachse parallel, bald einer der Nebenachsen, bald einer bei der Mineralspecies häufig, bald einer noch nicht beobachteten Fläche. Ein und dieselbe Mineralspecies bildet nur Zwillinge nach einem bestimmten Gesetze, eine andere bildet deren mehrere ganz verschiedene, wie wir von dem Feldspath oben deren 2 angeführt haben. Die Aufzählung derselben würde hier wohl zu weit führen; es ist dies mehr eine Aufgabe der Mineralogie, als der Krystallographie, die für die verschiedenen Systeme abgebildeten Zwillinge, deren Auseinandersetzung unter der Erklärung der Figuren zu finden ist, mögen hinreichen, die wichtigsten Zwillingsgesetze zu erläutern.

Von dem Hemimorphismus der Krystalle. *)

§. 115. Der Hemimorphismus kommt nur an Krystallen, die nicht zum regulären Systeme gehören, vor, und beruht darin, dass das eine Ende der Hauptachse stets von andern Flächen begränzt wird, als das andere, so dass es aussieht, als wenn der Krystall aus 2 Hälften zweier verschiedener

*) cfr. G. Rose. Ueber den Zusammenhang zwischen der Form und der electr. Polarität der Krystalle. Abhandl. d. Berl. Ac. d. Wiss. Jahr 1836 und

P. Riess und G. Rose. Ueber die Pyroelectricität der Mineralien eod. Jahr 1843.

Individuen zusammengesetzt wäre. Alle Krystalle, welche diese Erscheinung wahrnehmen lassen, zeigen auch diese polare Verschiedenheit in ihrem physikalischen Verhalten. Sie werden nehmlich alle durch Erwärmen electrisch und zwar an dem einen Ende + an dem andern —; auch steht die verschiedene Flächenbildung an beiden Enden im genauen Zusammenhang mit der Art der Electricität, welche die Enden zeigen, so dass man aus den Flächen, die man sieht, die Art der Electricität bestimmen kann, ob sie nehmlich + oder — sei. Wenn man z. B. den Turmalin erwärmt und seine Electricität bei abnehmender Temperatur beobachtet, so findet man nach G. Rose stets das Ende +, an dem die Hauptrhomboëderfläche R Taf. XII, Fig. 131 und 132 aufgesetzt erscheint auf die Kanten der ebenfalls hemimorph, d. h. zur 3seitigen Säule gewordenen 6seitigen Säule g′, und stets das Ende —, wo die Fläche R gerade aufgesetzt erscheint, auf die Fläche g′.

Auch bei anderen Mineralien hat man den Hemimorphismus beobachtet; aus dem drei- und einachsigen Systeme zeigt die Silberblende noch denselben, aus dem rhombischen ist es der Topas und das Kieselzinkerz, die den Zusammenhang des Hemimorphismus mit dem polar electrischen Verhalten der Krystalle darthun.

Der Grund dieser merkwürdigen Erscheinung beruht jedoch nicht allein in dem verschiedenen electrischen Verhalten der beiden Enden; es zeigen zwar alle hemimorphe Krystalle polare Electricität, aber nicht umgekehrt alle polar electrisch sich verhaltenden Krystalle Hemimorphismus. Der wahre Grund hievon ist uns ebensowenig bekannt, als der Grund der Krystallisationskraft selbst, deren Aeusserungen und Wirkungen wir wohl auf gewisse Gesetze zurückführen können, deren Wesen uns aber immer räthselhaft und geheimnissvoll bleiben wird.

Anhang.

In den folgenden Schematen sind die Ausdrücke für die Cosinuse der Combinationskanten der verschiedenen einfachen Körper miteinander für das reguläre, zwei- und einachsige und drei- und einachsige System nach Naumann zusammengestellt, wie sie sich nach den pag. 149 und pag. 341 angegebenen allgemeinsten Formeln für die verschiedenen Körper ergeben. Die Ausdrücke für den Cosinus W als einen stumpfen Winkel sind natürlich stets negativ zu nehmen. Die links senkrecht untereinander stehenden unaccentuirten Bezeichnungen werden stets als bekannt in ihren Werthen vorausgesetzt, die horizontal obenstehenden accentuirten Bezeichnungen geben die Flächen an, deren Combinationskante mit einer anderen bekannten man in den unter ihr sich befindlichen Abtheilungen findet, deren unbekanntes m′ oder n′ man nach einer oder wenn beide unbekannt sind, nach 2 Messungen durch diese Formeln findet. Man habe z. B. den Winkel gemessen, den ein unbekannter Pyramydenwürfel ∞O n′ mit einem bekannten Leucitoide m O m bildet. Den Werth für den Cosinus dieses Winkels setzt man nun gleich der Formel, die sich unter ∞O n′ in dem zweiten unter ihm gelegenen Felde findet, woraus wir dann den Werth n′ entwickeln können.

Die pag. 149 angegebene allgemeine Formel für Cos. W des Combinationskantenwinkels zweier Flächen wird, wenn wir für a, b, c und a′, b′, c′ die entsprechenden Parameterwerthe substituiren, für die Combinationskante Π zweier Hexakisoctaëder m O n und m′O′n

$$\cos \Pi = -\frac{mm'(nn'+1)+nn'.}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\;\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2}.}$$

Der Uebersicht wegen ist in den folgenden Schematen der erste Factor des Nenners = M, der zweite = M′ gesetzt.

Cosinus der Combinationskanten je zweier homoedrischer Gestalten des regulären Systems.

	$\infty 0 \infty$	$\infty 0$	0	$\infty 0 n'$	$m' 0$	$m' 0 m'$	$m' 0 n'$
$m 0 n$	$\frac{m n}{M}$	$\frac{m(n+1)}{M \sqrt{2}}$	$\frac{m(n+1)+n}{M \sqrt{3}}$	$\frac{m(nn'+1)}{M \sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mm'(n+1)+n}{M \sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m(m'n+1)+n}{M \sqrt{m'^2+2}}$	$\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{M M'}$
$m 0 m$	$\frac{m}{\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m+1}{\sqrt{2} \sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m+2}{\sqrt{3} \sqrt{m^2+2}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{n'^2+1} \sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m'(m+1)+1}{\sqrt{2m'^2+1} \sqrt{m^2+2}}$	$\frac{mm'+2}{\sqrt{(m^2+2)(m'^2+2)}}$	
$m 0$	$\frac{m}{\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2m}{\sqrt{2} \sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2m+1}{\sqrt{3} \sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{m(n'+1)}{\sqrt{n'^2+1} \sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2mm'+1}{\sqrt{(2'm^2+1)(2m^2+1)}}$		
$\infty 0 n$	$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{2} \sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{3} \sqrt{n^2+1}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{(n^2+1)(n'^2+1)}}$			
0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	—				
$\infty 0$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	—					
$\infty 0 \infty$	—						

Cosinus der Combinationskanten je zweier geneigtflächig hemiedrischer Gestalten.

Sind die mit einander combinirten Gestalten zu einander in gleicher Stellung, d. h. gehören sie beide den gleichgelegenen Hälften ihrer homoëdrischen Körper an, sind es also 2 rechte oder 2 linke Hälften, so gelten für sie natürlich dieselben Formeln, wie für ihre homoëdrischen Gestalten; gehören dieselben aber verschiedenen Hälften an, ist ein Körper der rechte, der andere der linke Hälftflächner, „befinden sich beide in verwendeter Stellung“, so ändert sich die allgemeine Formel, es wird für die Combinationskante von $+\frac{mOn}{2}$ mit $-m'On'$ $\cos\pi' = -\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{MM'}$ daraus ergiebt sich dann folgendes Schema:

	$-\frac{O}{2}$	$-\frac{m'O}{2}$	$-\frac{m'Om'}{2}$	$-\frac{m'On'}{2}$
$\frac{mOn}{2}$	$\frac{m(n+1)-n}{M\sqrt{3}}$	$\frac{mm'(n+1)-n}{M\sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m(m'n+1)-n}{M\sqrt{m'^2+2}}$	$\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{MM'}$
$\frac{mOm}{2}$	$\frac{m}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m'(m+1)-1}{\sqrt{m^2+2}\sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m'm}{\sqrt{m^2+2}\sqrt{m'^2+2}}$	
$\frac{mO}{2}$	$\frac{2m-1}{\sqrt{3}\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2mm'-1}{\sqrt{2m^2+1}\sqrt{2m'^2+1}}$		
$\frac{O}{2}$	$\frac{1}{3}$			

Cosinus der Combinationskanten je zwei parallelflächig hemiedrischer Gestalten.

Es sind hiebei folgende Verschiedenheiten zu berücksichtigen. Es kann nehmlich jede Fläche F mit der gleichliegenden F', der andern CKanten bilden Fig. XXXVII mit der Dyakisdodecaëderfläche artr' eine andere ebenso gelegene die Kante Π'' oder mit der Fläche FF, welche mit artr' an r't oder mit $F_{\prime\prime}$, welche mit diesen an rt zusammenstösst, die Combinationskanten $\Pi_{\prime}''$ und $\Pi_{\prime\prime}''$. Diese 3 Verschiedenheiten

können ebensogut bei gleicher, als bei verwendeter Stellung eintreten. Man findet daraus

A für gleiche Stellung — B für verwendete Stellung

$$\cos \Pi'' = -\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{MM'} = -\frac{m'n(mn'+1)+mn'}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\prime} = -\frac{m'n(m+n')+mn'}{MM'} = -\frac{n'n(m'+m)+m'm}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\prime\prime} = -\frac{mn'(m'+n)\,m'n}{MM'} = -\frac{mm'(n'+n)+n'n}{MM'}.$$

Die wichtigste ist immer die Combinationskante Π' und für sie gestaltet sich bei verwendeter Stellung das Schema folgendermassen, da bei gleicher Stellung ebenso wie bei den geneigtflächig hemiedrischen Gestalten dieselben Formeln wie für die homoëdrischen gelten.

	$-\frac{\infty O n'}{2}$	$-\left[\frac{m' O n'}{2}\right]$
$\left[\frac{m O n}{2}\right]$	$\frac{n(mn'+1)}{M\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{m'n(mn'+1)+mn'}{MM'}$
$\frac{\infty O n}{2}$	$\frac{nn'}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	

Cosinus der Combinationskanten je zweier Gestalten des zwei und einachsigen Systemes.

Aus der allgemeinen Formel findet sich für dieses System für 2 Dioctaëder m P n und m'P n'

$$\cos \Pi = -\frac{mm'a^2(nn'+1)+nn'}{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}\ \sqrt{m'^2a^2(n'^2+1)+n'^2}}.$$

Auch hier setzen wir wieder die beiden Factoren des Nenners $= MM'$.

Da die hemiedrischen Gestalten nur selten und untergeordnet vorkommen, so dass sich stets Combinationskanten mit gleichgelegenen Flächen messen lassen, auf welche sich die Werthe für die homoedrischen unmittelbar anwenden lassen, so sind nur die Formeln für diese im folgenden angegeben.

Cosinus der Combinationskanten je zweier Gestalten des zwei- und einachsigen Systemes.

	oP	∞P∞	∞P	∞Pn'	m'P∞	m'P	m'Pn'
mPn	$\frac{n}{M}$	$\frac{mna}{M}$	$\frac{ma(n+1)}{M\sqrt{2}}$	$\frac{ma(nn'+1)}{M\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{(mm'a^2+1)n}{M\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{mm'a^2(n+1)+n}{M\sqrt{2m'^2a^2+1}}$	$\frac{mm'a^2(nn'+1)+nn'}{MM'}$
mP	$\frac{1}{\sqrt{2m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{2m^2a^2+1}}$	$\frac{2ma}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{ma(n'+1)}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{2mm'a^2+1}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{2m'^2a^2+1}}$	
mP∞	$\frac{1}{\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{mn'a}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{m'^2a^2+1}}$		
∞Pn	0	$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$			
∞P	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1				
∞P∞	0	1					
oP	1						

Cosinus der Combinationskanten je zweier Gestalten des drei- und einachsigen Systems.

	oP	∞P2	∞P	∞Pn	mP2	mP	mPn
m'Pn'	$\frac{n'\sqrt{3}}{M'}$	$\frac{m'an'\sqrt{3}}{M'}$	$\frac{m'a(n'+1)}{M'}$	$\frac{m'a(2nn'-n-n'+2)}{M'\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{n'(mm'a^2+1)\sqrt{3}}{M\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{2mm'a^2(n'+1)+3n'}{M'\sqrt{4m^2a^2+3}}$	$\frac{2mm'a^2(2nn'-n-n'+2)+3nn'}{MM'}$
m'P	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{m'a\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{2m'a}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{m'a(n+1)}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{(mm'a^2+1)\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{4mm'a^2+3}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{4m^2a^2+3}}$	
m'P2	$\frac{1}{\sqrt{m^{2'}a^2+1}}$	$\frac{m'a}{\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{m'a\sqrt{3}}{2\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{m'an\sqrt{3}}{\sqrt{m'^2a^2+1}\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{m'^2a^2+1}\sqrt{m^2a^2+1}}$		
∞Pn'	0	$\frac{n'\sqrt{3}}{2\sqrt{n'^2-n'+1}}$	$\frac{n'+1}{2\sqrt{n'^2-n+1}}$	$\frac{2nn'-n-n'+2}{2\sqrt{n'^2-n'+1}\sqrt{n^2-n+1}}$			
∞P	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
∞P2	0	1					
oP	1						

In dem vorhergehenden Schema, wie für die folgenden Combinationskanten ist $M = \sqrt{4m^2a^2(n^2 - n + 1) + 3n^2}$ $M' = \sqrt{4m'^2a^2(n'^2 - n^2 + 1) + 3n'^2}$ (pag. 341).

Combinationskanten der Skalenoëder und Rhomboëder.

Es können sich zwischen 2 Skalenoëdern $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ zweierlei verschiedene Arten von Combinationskanten bilden, nehmlich sg. „heteropolare“, wenn nehmlich beide Flächen zu einer und derselben oberen oder unteren Hälfte des Körpers gehören, oder sg. „amphipolare“, wenn die beiden Flächen verschiedenen Hälften angehören. Ausserdem kommt ebenfalls noch die Stellung der beiden Körper zu einander in Betracht, ob sie nehmlich in verwendeter oder gleicher Stellung sich befinden. Bezeichnen wir die heteropolare Combinationskante mit Π, die amphipolare mit Π', so ist

A bei gleicher Stellung B bei verwendeter Stellung

$$\cos \Pi = -\frac{2mm'a^2(2nn' - n - n' + 2) + 3nn'}{MM'} = -\frac{2mm'a^2(nn' + n + n' - 2) + 3nn'}{MM'}$$

$$\cos \Pi' = -\frac{2mm'a^2(nn' + n + n' - 2) - 3nn'}{MM'} = -\frac{2mm'a^2(nn' - n - n' + 2) - 3nn'}{MM'}$$

Da die Bezeichnung der Flächen nach Naumann von der nach Weiss, die wir bisher angenommen hatten, etwas abweicht, so ist es nöthig, um die Werthe der Flächen, wie sie nach den obigen Schematen gefunden werden, unserer Bezeichnung anzupassen, die Verschiedenheit beider anzugeben; es sind daher im folgenden die Bezeichnungen der verschiedenen Flächen der einzelnen Krystallsysteme nach Naumann und Weiss neben einander gestellt.

Es ist aber nach Weiss			nach Naumann
I. im regulären Systeme:			
Octaëder	(a : a : a)	=	O
Granatoëder	(a : a : ∞ a)	=	∞ O
Würfel	(a : ∞ a : ∞ a)	=	∞ O ∞
Leucitoide	(a : ma : ma)	=	m O m
Pyramiden-Octaëder	(a : a : na)	=	m O
Pyramiden-Würfel	(a : ma : ∞ a)	=	∞ O n
Hexakisoctaëder	(a : ma : na)	=	m O n
II. im 2 und 1achsigen Systeme:			
Quadratoctaëder	(a : a : c)	=	P
Endfläche	(∞ a : ∞ a : c)	=	o P
I. Säule	(a : a : ∞ c)	=	∞ P
II. Säule	(a : ∞ a : ∞ c)	=	∞ P ∞
Octaëder I. Ordnung	(a : a : mc) *)	=	m P
8seitige Säule	(a : ma : ∞ c)	=	∞ P n
Octaëder II. Ordnung	(a : ∞ a : mc) *)	=	m P ∞
Dioctaëder	(a : na : mc)	=	m P n
III. im 1 und 1achsigen Systeme:			
Rhombenoctaëder	(a : b : c)	=	P
stumpf. oder spitz. Rhombenoctaëder	(a : b : mc)	=	m P
Flächen des I. Paares (cfr. p. 215)	(a : ∞ b : c)	=	$\bar{P}\infty$
„ „ II. „	(a : b : ∞ c)	=	∞ P
„ „ III. „	(∞ a : b : c)	=	$\breve{P}\infty$
I. Seitenfläche	(a : ∞ b : ∞ c)	=	$\infty\bar{P}\infty$
II. „	(∞ a : b : ∞ c)	=	$\infty\breve{P}\infty$
gerade Endfläche	(∞ a : ∞ b : c)	=	o P
Rhombenoctaëder von verschiedener Basis	(a : nb : mc)	=	$m\bar{P}n$
	(na : b : mc)	=	$m\breve{P}n$

*) Wird m > 1, so sind es spitzere, wird es < 1, so sind es stumpfere Octaëder.

nach **Weiss**	nach **Naumann**	
Prismenflächen	$(a : \infty b : mc)$	$= m\bar{P}\infty$
bald spitzer, bald stumpfer,	$(\infty a : b : mc)$	$= m\breve{P}\infty$
als die drei zusammen-	$(a : nb : \infty c)$	$= \infty\bar{P}n$
gehörigen Paare.	$(na : b : \infty c)$	$= \infty\breve{P}n$

IV. im 3 und 1achsigen Systeme:

Dihexaëder . . . . $\left(a : \overset{c}{a} : \infty a\right)$ . . . $=$ P

Sechs- und Sechskantner $\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n}a} : \frac{1}{n-1}a\right)$ . . $=$ mPn

Dihexaëder I. Ordnung . . . $\left(a : \overset{mc}{a} : \infty a\right)$ . . . . $=$ mP

Dihexaëder II. Ordnung . . $\left(2a : \overset{mc}{a} : 2a\right)$ . . . . $=$ $mP2$

12seitige Säule . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{\frac{1}{n}a} : \frac{1}{n-1}a\right)$ . . . $=$ ∞Pn

I. 6seitige Säule . . . . . . $\left(a : \overset{\infty c}{a} : \infty a\right)$ . . . . . $=$ ∞P

II. 6seitige Säule . . . . . . $\left(2a : \overset{\infty c}{a} : 2a\right)$ . . . . $=$ $\infty P2$

gerade Endfläche . . . . . . $\left(\infty a : \overset{c}{\infty a} : \infty a\right)$ . . $=$ oP

Rhomboëder . . . . $\frac{1}{2}\left(a : \overset{c}{a} : \infty a\right) r$ . . . $=$ $+R$

Rhomboëder . . . . $\frac{1}{2}\left(a' : \overset{c}{a'} : \infty a\right) l$ . . . $=$ $-R$

spitz. od. stumpf. Rhomboëder $\frac{1}{2}\left(a : \overset{mc}{a} : \infty a\right)$*) r u. l $=$ $\pm mR$

Drei- und Dreikantner . . . $\frac{1}{2}\left(a : \overset{\gamma c}{\frac{1}{n}a} : \frac{1}{n-1}a\right)$ $=$ mR^n

Um die Bezeichnung für die Gestalten des drei- und und 1achsigen Systemes nach **Naumann** in die von **Weiss** übertragen zu können, bedarf es noch einiger Erläuterung,

*) Je nachdem $m > $ oder < 1 ist.

besonders für die Sechs- und Sechskantner und Drei- und Dreikantner. In unserer Bezeichnung ist nehmlich jeder Sechs- und Sechskantner so construirt, dass von den 3 Dimensionen a, welche seine Fläche schneidet (Fig. LXXVI) diejenige, von welcher sie das grösste Stück abschneidet, in der Einheit genommen wird. Nach Naumann wird das kleinste a unser $\frac{1}{n}$ a in der Einheit angenommen und das nächst kleinere unser $\frac{1}{n-1}a = na$, wo n jedenfalls > 1 und < 2 sein muss, weil für $n = 2$ das Dihexaëder II. Ordnung entsteht, sein m entspricht dann unserem γ. Die am Apatit beobachteten, zur Hälfte ausgebildeten Sechs- und Sechskantner u und b (cfr. pag. 343) haben nach unserer Bezeichnung die Werthe $u = \left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right)$ nach Naumann $= 3P\frac{3}{2}$, d. h. $\left(xa : \overset{3c}{a} : \tfrac{3}{2}a\right)$, da nach Naumann nur der Werth des 2ten und letzten a unseres Zeichens und der von c angegeben wird. Ebenso wird die Fläche $u = \left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{4}a} : \tfrac{1}{3}a\right)$ nach Naumann $= 4P\frac{4}{3}$ gleich $\left(xa : \overset{4c}{a} : \tfrac{4}{3}a\right)$. Aus den Werthen für 2a finden wir meist leicht unmittelbar den des dritten, können also auf diese Weise die Naumann'sche Bezeichnung in die Weiss'sche übertragen. Dividiren wir in dem obigen Beispiele mit 3 unser a, das das kleinste in unserm Zeichen und von der Form $\frac{1}{n}$ sein soll, so erhalten wir $\left(\tfrac{1}{3}xa : \overset{c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right)$. Da nun $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ der Form $\frac{1}{n} : \frac{1}{n-1}a$ entspricht, so wird $\frac{1}{3}xa = 1$, das Zeichen also, wie oben $\left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right)$ oder $\left(3a : \overset{3c}{a} : \tfrac{3}{2}a\right)$.

Für die Rhomboëder und 3 und 3Kantner (Skalenoëder) hat Naumann eine besondere Bezeichnung, indem er die Rhomboëder mit R bezeichnet und die Skalenoëder aus diesen, wie die Sechs- und Sechskantner aus den Dihexaëdern ableitet.

R — als Bezeichnung der Rhomboëder — ist dann $= \frac{P}{2}$ und $mR = \frac{mP}{2} = \left(a : \overset{mc}{a} : \infty a\right)$. Er bezeichnet nun die Skalenoëder dadurch, dass er sie durch die Lateralkanten eines Rhomboëders gelegt denkt und dann das Verhältniss angiebt, in welchem sie die Hauptachse schneiden. Es ist also das Skalenoëder mR^n ein Drei- und Dreikantner, dessen Lateralkantenrhomboëder $= mR$ ist und dessen Hauptachse n mal die des eingeschlossenen Lateralkantenrhomboëders ist. Wir haben pag. 313 und 314 die Bedingungen entwickelt, welche zwischen einem eingeschlossenen Lateralkantenrhomboëder eines Drei- und Dreikantners und diesem selbst Statt findet. Nach Naumann entspricht aber dem Drei- und Dreikantner, dem das Zeichen mPn zukommt, wenn man ihn aus dem Sechs- und Sechskantner ableitet, das Zeichen $m\frac{(2-n)}{n} R^{\frac{n}{2-n}}$ oder wenn man das Zeichen des aus einem Rhomboëder mR abgeleiteten Drei- und Dreikantners mR^n hat, entspricht diesem die Bezeichnung $mnP\frac{2n}{n+1}$, wenn man ihn auf den Sechs- und Sechskantner zurückführen will.

Es ist daher unser Drei- und Dreikantner $\frac{1}{2}\left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right) = \frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ nach Naumann $= R^3$; für diesen ist nehmlich, wenn man ihn auf die Form mR^n bringt, $m = 1$, $n = 3$, also wird der Sechs- und Sechskantner, zu dem er gehört. $mnP\frac{2n}{n+1} = 3P\frac{3}{2}$, aus dem wir in der pag. 364 angegebenen Weise das obige Zeichen für unsere Drei- und Drei- oder Sechs- und Sechskantner finden. Der Drei- und Dreikantner t Fig. 156 hat nach Naumann die Bezeichnung $\frac{1}{4}R^3$, dies giebt $= \frac{\frac{3}{4}P\frac{3}{2}}{2}$, d. h. also $= \left(xa : \overset{\frac{3}{4}c}{a} : \tfrac{3}{2}a\right) = \left(\tfrac{1}{3}xa : \overset{\frac{1}{4}c}{\tfrac{1}{3}a} : \tfrac{1}{2}a\right)$,

woraus wir wieder das erste $a = 1a$ finden, da $\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$ unserm $\frac{1}{n} : \frac{1}{n-1}$ entspricht, er wird also der Drei- und Dreikantner t Taf. XIII, Fig. 156 $= \frac{1}{2}\left(a : \overset{\frac{1}{4}c}{\frac{1}{3}a} : \frac{1}{2}a\right)$.

Ebenso wird der Drei- und Dreikantner $\frac{8}{5}R^{3}$ = unserm $\left(a : \overset{\frac{8}{5}c}{\frac{1}{3}a} : \frac{1}{2}a\right)$, da hier $mnP\frac{2n}{n+1} = \frac{\frac{24}{5}P\frac{6}{4}}{2}$, d. h. $= \left(xa : \overset{\frac{24}{5}c}{a} : \frac{3}{2}a\right)$ $= \left(\frac{1}{3}xa : \overset{\frac{8}{5}c}{\frac{1}{3}a} : \frac{1}{2}a\right)$ wird, wenn wir die Naumann'sche Bezeichnung nach unserer Art ausdrücken. Den Werth des dritten a können wir immer leicht finden, auch wenn die nach unserer Art geschriebene Naumann'sche Bezeichnung nicht von der Form $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n-1}$, d. h. also unser drittes a in der Einheit genommen ist. Es mag nehmlich dieses a in der Einheit geschnitten werden oder nicht, das Verhältniss in dem das erste, zweite und dritte a geschnitten wird, muss immer das von $1 : \frac{1}{n} : \frac{1}{n-1}$ sein. Setzen wir nun die Werthe, wie wir sie für $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n-1}$ haben, in diese Proportion, so finden wir daraus leicht den Werth, der unserem n entspricht, damit also auch das dritte a. Wir haben z. B. die Naumann'sche Bezeichnung $4P\frac{4}{3}$, d. h. für die zweite und dritte Dimension a das Verhältniss von $1 : \frac{4}{3}$, so ist also $\frac{1}{n} : \frac{1}{n-1} = 1 : \frac{4}{3}$, daraus wird

$$\frac{4}{3n} = \frac{1}{n-1}$$
$$4n - 4 = 3n$$
$$n = 4,$$

also das Verhältniss der 3 Dimensionen wie $a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a$; mit andern Worten, wir haben die Fläche durch $\frac{1}{4}$ des zweiten a

statt durch 1a gelegt, um sie unserer Formel gerecht zu machen, müssen daher, um ihre Verhältnisse ungestört zu behalten, auch die Dimension c und die dritte Dimension a nur noch zum vierten Theil so gross nehmen, also statt 4c nur 1c und statt $\frac{4}{3}$a nur $\frac{1}{3}$a, wodurch also unser Zeichen, wie oben sich gestaltet, als $\left(a : \overset{c}{\tfrac{1}{4}a} : \tfrac{1}{3}a\right)$.

Die angeführten Beispiele werden hinreichen, um zu zeigen, wie diese beiden gebräuchlichsten Bezeichnungsarten sich gegenseitig in einander übertragen lassen.



Druckfehler.

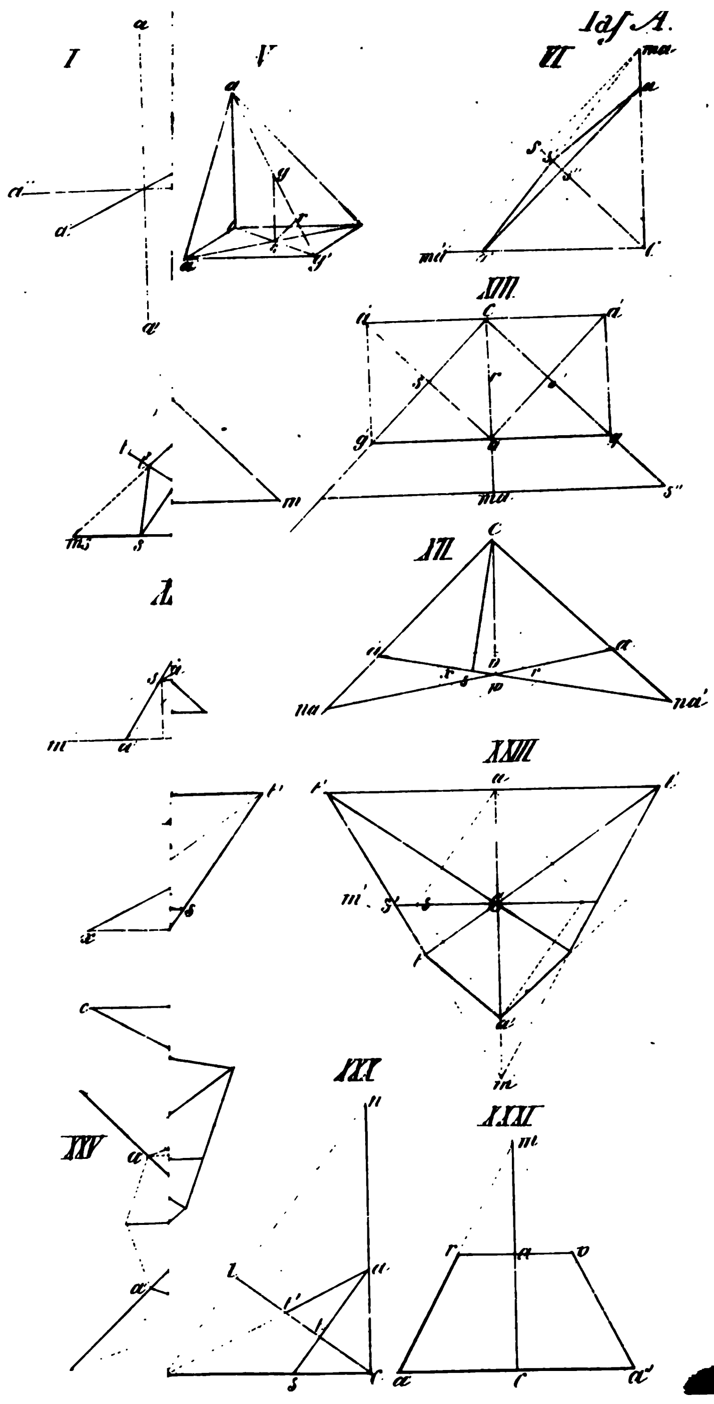
S. 38 Z. 11 von unten lies (L u. l statt (L u. ∠
„ 41 „ 3 „ oben „ $\frac{1}{3}$d statt $\frac{1}{3}$;d.
„ 56 „ 1 „ unten „ Für m = 2 statt Für n = 2.
„ 106 „ 9 „ „ „ $\left[\frac{m\,O\,n}{2}\right]$ statt $\frac{m\,O\,n}{2}$.
„ 110 „ 9 „ „ gehört bei der I. Formel das Wurzelzeichen auch zum Nenner.
„ 112 „ 5 „ „ lies des gleichseitigen statt des rechtwinkligen.
„ 136 „ 3 „ oben „ (α : 3a : 3a) statt (a : $\frac{3}{2}$a : 3a).
„ 196 „ 15 „ „ „ von c nach s. statt von C nach s.
„ 196 „ 10 „ unten „ der Pyramidenwürfel-Hexakisoctaëder- und Leuc.
„ 252 „ 10 „ oben „ der dreierlei statt der 3 dreierlei.
„ 256 „ 1 „ unten „ wir haben daher statt hatten daher.
„ 278 „ 1 „ „ „ PT etc. Abh. der Berl. Ac. J. 1836.
„ 289 „ 8 „ „ und Seite 166 und 167 lies und LXXVIIb statt und LXXVIII.
„ 291 „ 6 „ „ lies für die 6 und 6 Kantner statt für die Dihexaëder.
„ 293 „ 1 „ oben „ cos : sin statt sin : cos.
„ 293 „ 7 „ unten vor 8) fehlt in der zweiten Proportion vor aγc das Proportionszeichen :
„ 296 „ 1 „ „ lies e Taf. XII statt c Taf. XII.
„ 310 „ 7 „ „ „ γq' statt γq.
„ 311 „ 2 „ oben „ Fig. LXXXII statt LXXXIV.
„ 352 „ 17 „ „ „ T u. T statt l und l'.

Taf. C Fig. LXXVI ist die mittlere ausgezogene Linie mit l k s statt h k s bezeichnet.

Taf. C Fig. LXXXV fehlt der Buchstabe i am Eck des eingezeichneten 3 und 3 Kantners da, wo sich die Linie r''h S u. t o m schneidet. Der Buchstabe q gehört in die Mitte der Linie fa, wo sie von der Linie Cg geschnitten wird.

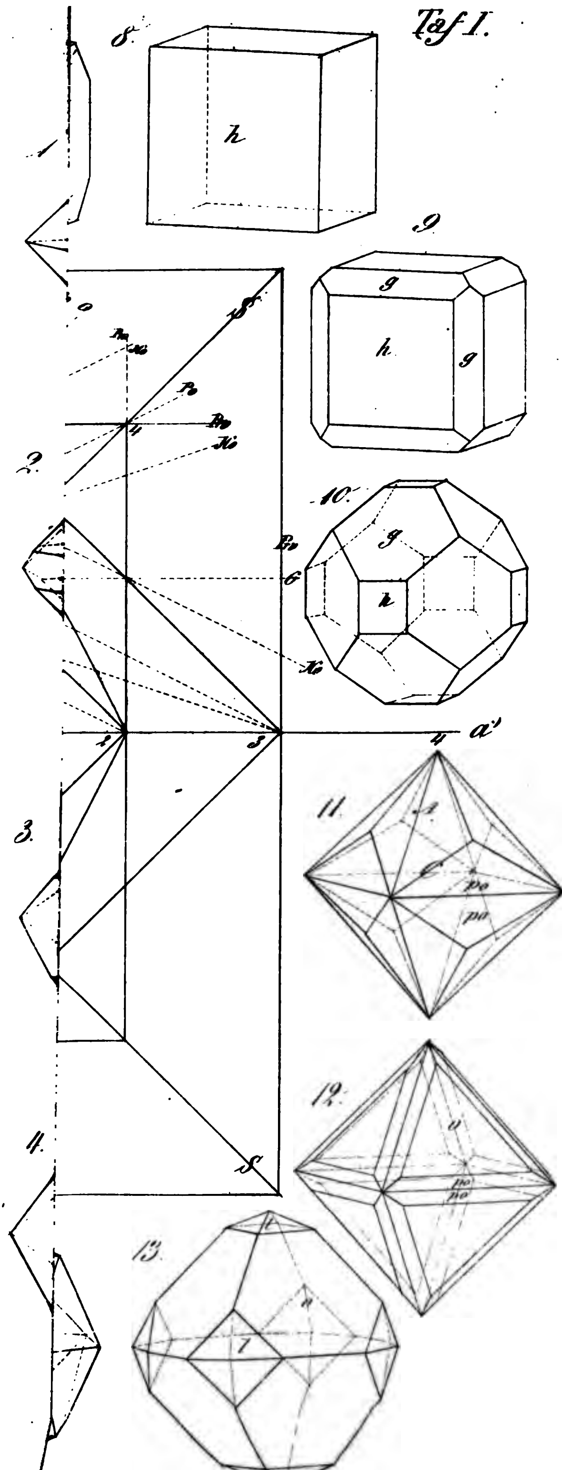
Taf. C Fig. LXXXIX fehlt auf der Linie a'a ober- und unterhalb C die Bezeichnung des Zonenpunctes $\frac{1}{3}$.



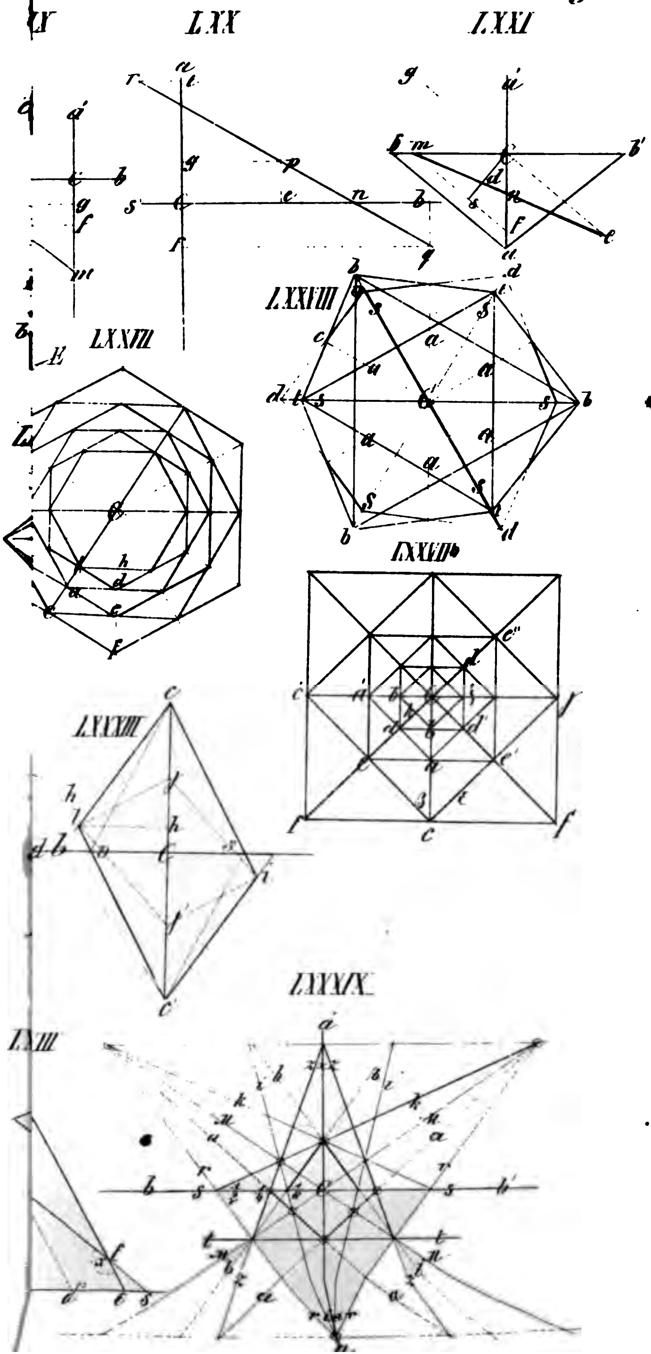

Taf. A.
I
V
VI
XVII
X
XII
XXIII
XIV
XXX
XXXI



Taf. I.



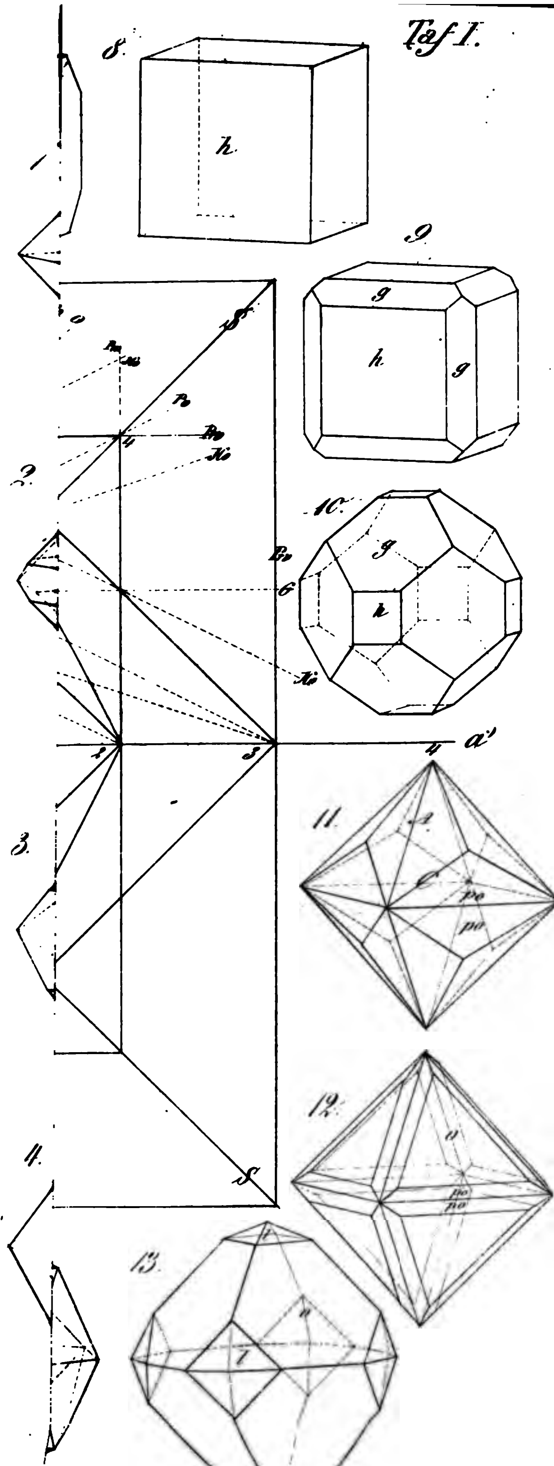
Taf. C.

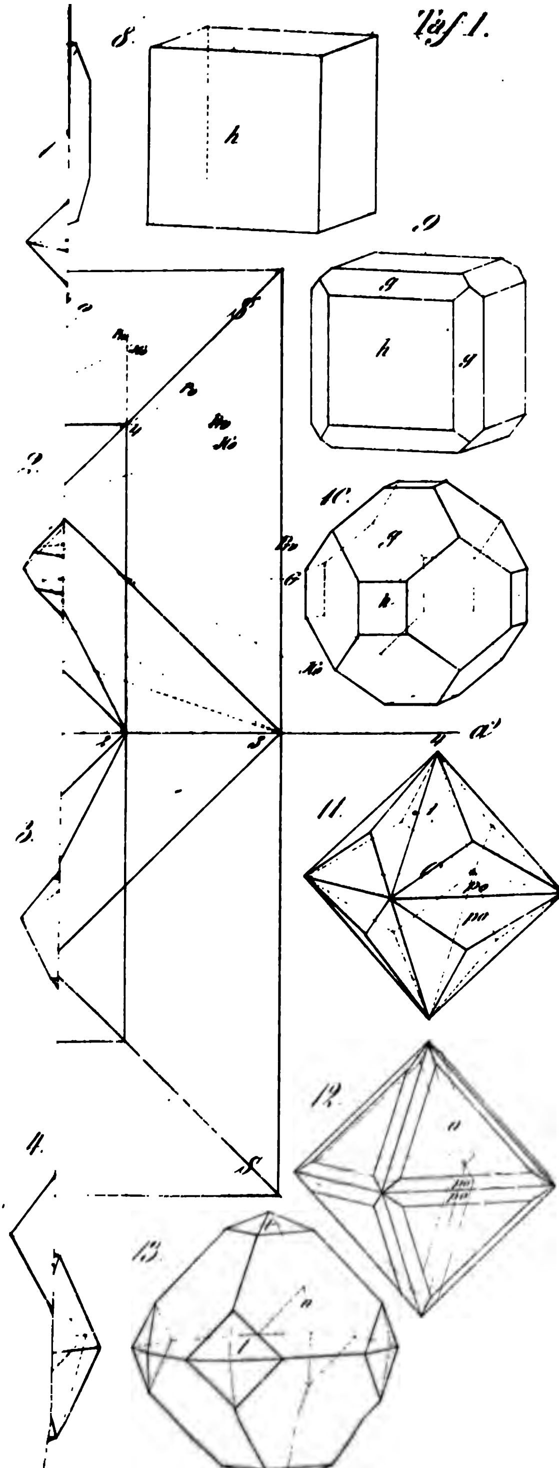


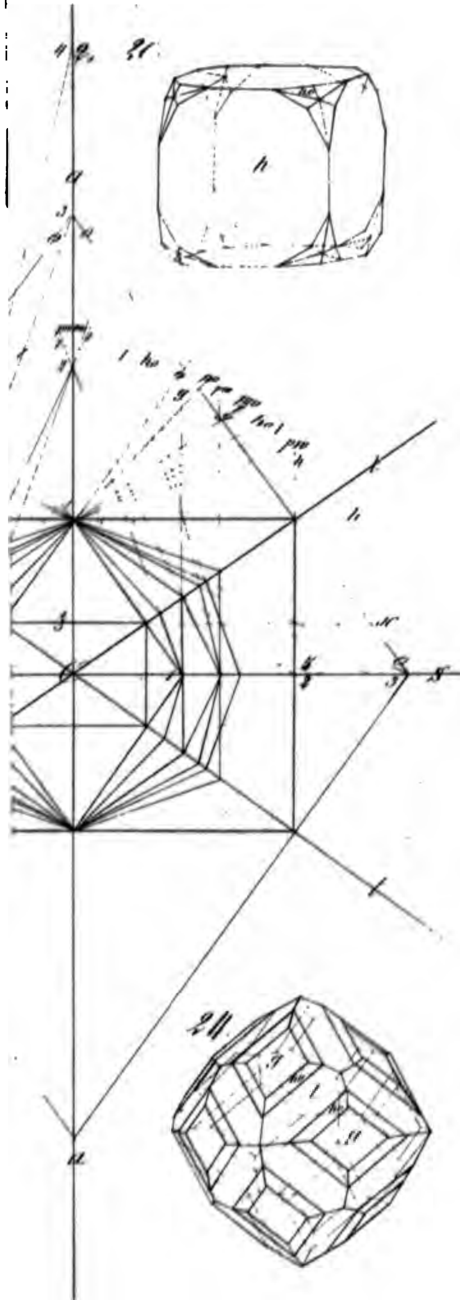




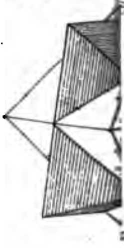
Taf. I.



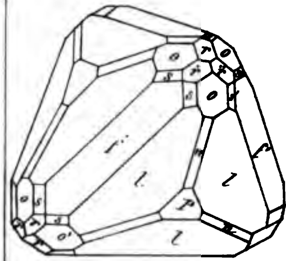

Taf. 1.



53.

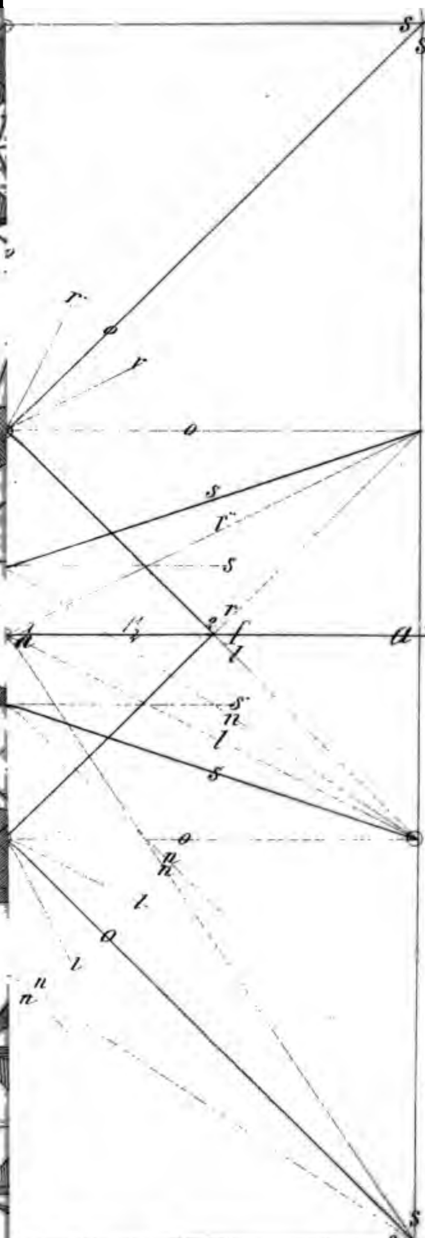


50.



54.

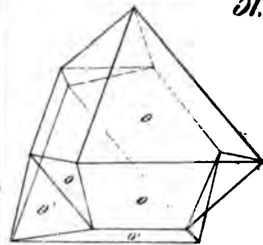




55.



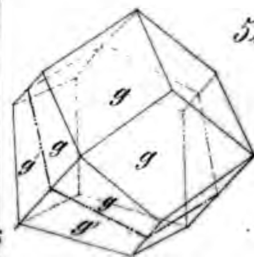
51.

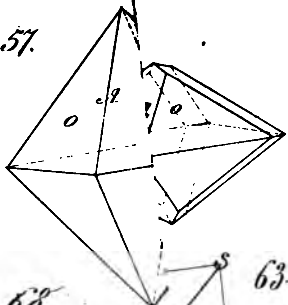
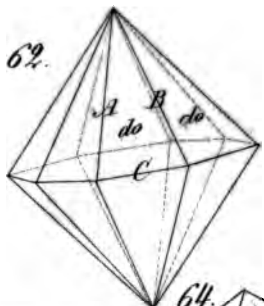
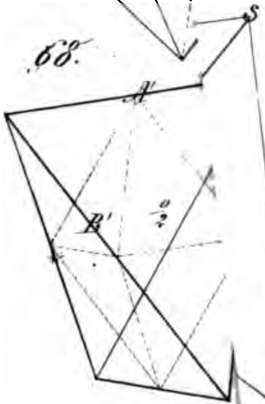


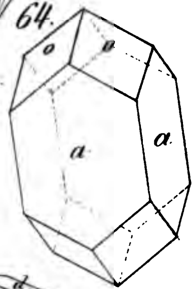
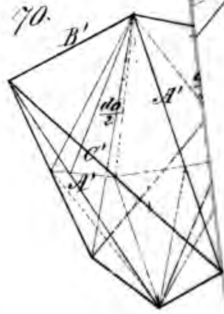
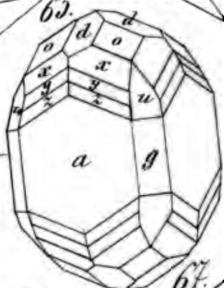
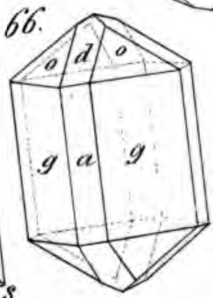
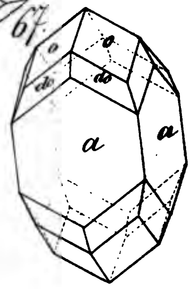
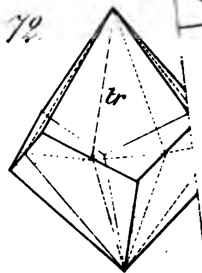
56.



52.



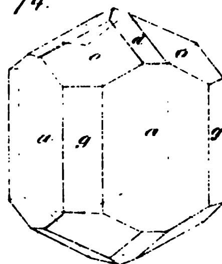

57.
o
o

62.
A
B
do
do
C

68.
A'
B'

63.
o
o
g
g

64.
o
o
a
a

70.
B'
A'
C'
A'

65.
d
o
d
o
x
x
u
a
g

66.
o
d
o
g
a
g

67.
o
o
do
do
a
a

72.
tr

82.



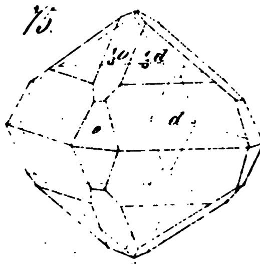
74.



82 a.



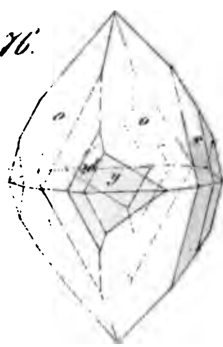
75.

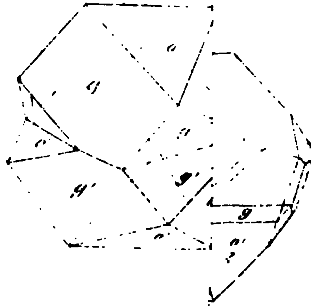


81.

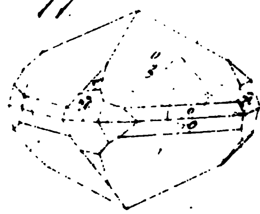


76.

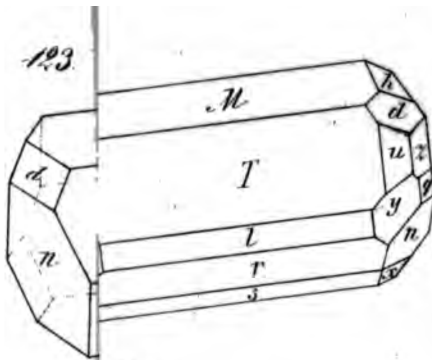


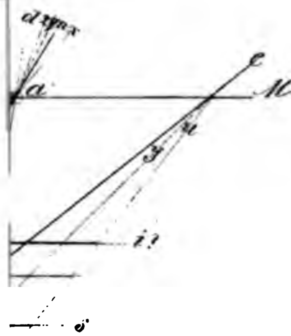


77.





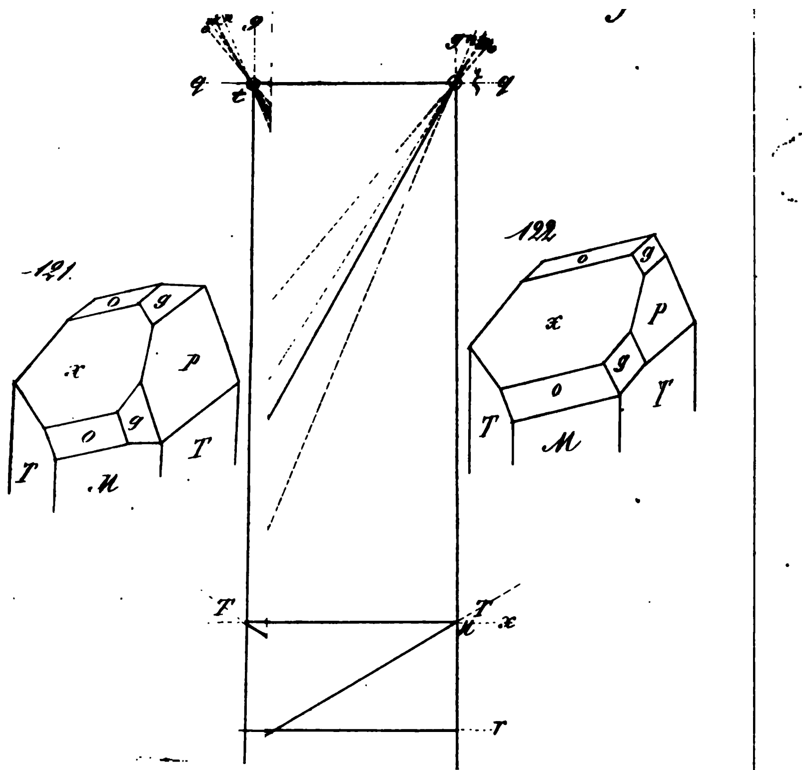


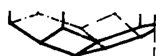


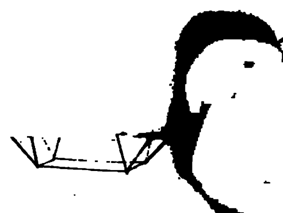
b r r′ b′

1

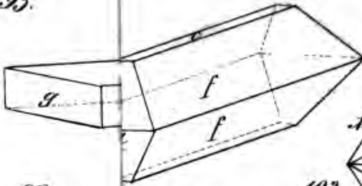



121
o
g
x
p
T
M
122
q
t
r

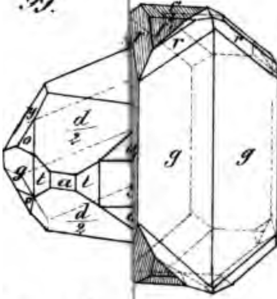




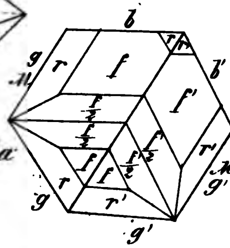




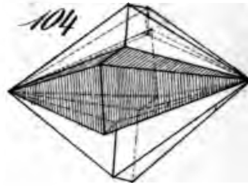
95.

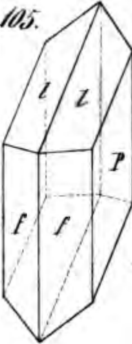


99.



103a

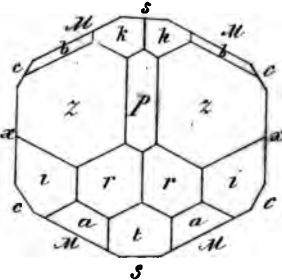

104



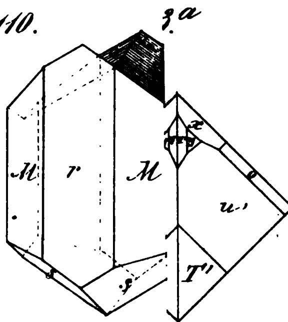
105.



9.a

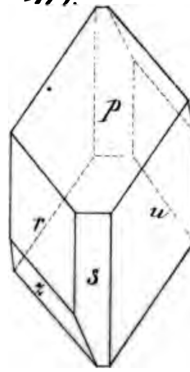


109.b

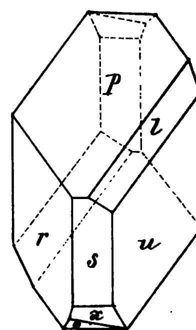


110.

3.a

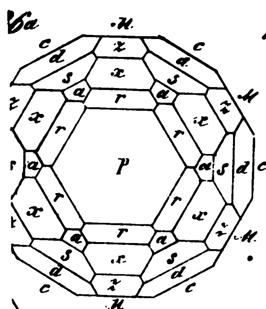


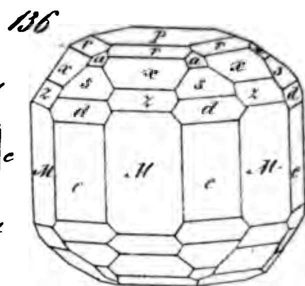
114.

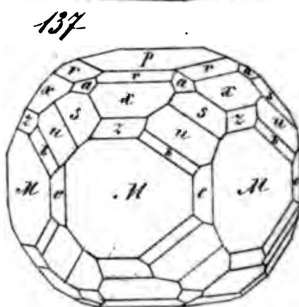


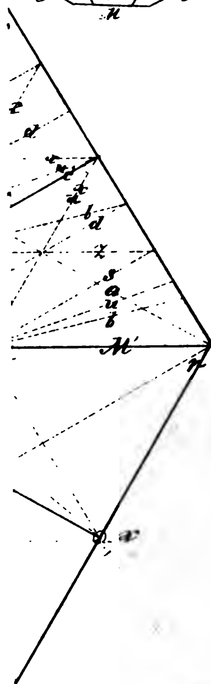
115.

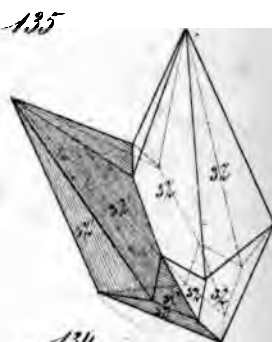


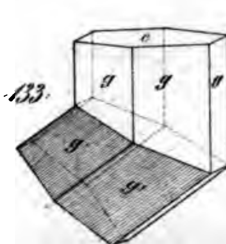

6a
M
c
d
z
x
s
a
r
P

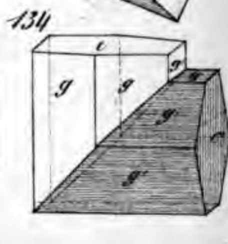

136
P
r
a
x
s
z
d
M
c


137
P
r
a
x
s
z
u
M
c

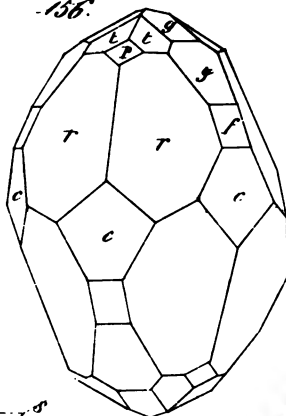

z
d
x
d
z
s
a
u
t
M'
n
x

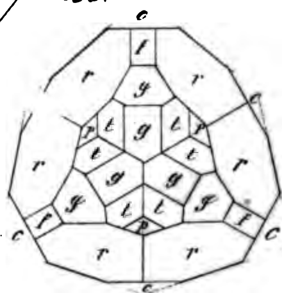

135
32

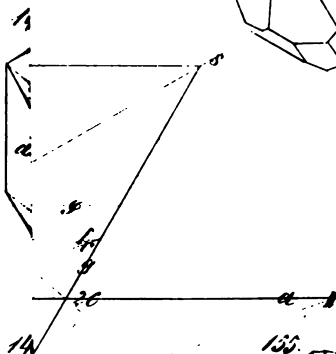

133.
c
g
g'

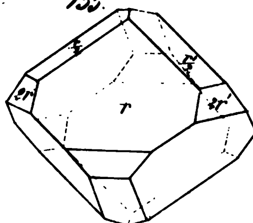

134
c
g
g'

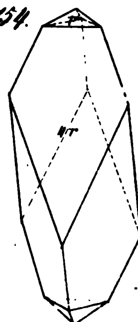


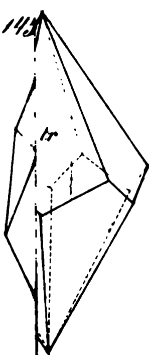

156.
t
t
p
g
g
f
r
r
c
c
c

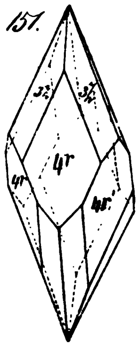

156.a
c
t
g
r
r
p
t
g
t
p
c
r
t
g
g
t
r
g
t
t
g
f
p
f
c
c
r
r
c

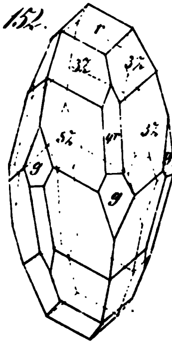

14.
s
a
26
a
14

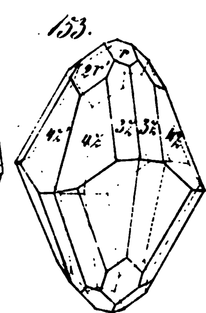

155.
2r'
r


154.
4r


143.
tr


151.
4r


152.
r
g
g


153.
r
2r'





